I Rappels : intégrale d'une fonction continue

I.1 Définition

Définition 1
Soient $a, b \in \mathbb{R}, a \leqslant b$.

1. *Une subdivision de $[a, b]$ est une famille $x_0, \ldots, x_n$ telle que $x_0 = a < x_1 \cdots < x_n = b$.*
2. *$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite en escalier s'il existe une subdivision $\{x_i\}_{i \in [\![0,n]\!]}$ telle que f est constante sur $]x_i, x_{i+1}[$ pour tout i. Une telle subdivision est dite adaptée à f.*

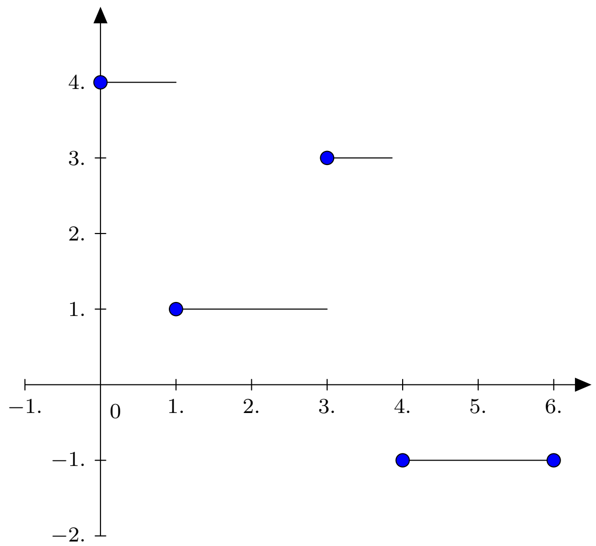

FIGURE 1 – Une fonction en escalier sur $[0, 6]$

I.2 Propriétés de l'intégrale

Théorème 1
Soient $f, g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. On a donc $a \leqslant b$.

1. *Linéarité : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$. En d'autres termes $\varphi \mapsto \int_a^b \varphi$ est une forme linéaire sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.*
2. *Croissance : $f \geqslant 0 \Rightarrow \int_a^b f \geqslant 0$ et $f \leqslant g \Rightarrow \int_a^b f \leqslant \int_a^b g$.*
3. *Inégalité triangulaire : $\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$.*

Proposition 1
Relation de Chasles Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ et $c \in [a, b]$. Alors

$$\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$$

Définition 2
Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. On pose $\int_b^a f = -\int_a^b f$.

I.3 Fonctions complexes

Définition 3
Soit $f \in \mathbb{C}^{[a,b]}$. On dit que f est continue si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ le sont. On pose alors

$$\int_a^b f = \int_a^b \operatorname{Re} f + i \int_a^b \operatorname{Im} f$$

II Calcul intégral

II.1 Primitives

Définition 4
Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. Une primitive de f est une fonction $F : I \to \mathbb{R}$ dérivable et telle que $F' = f$. On a alors forcément $F \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$.

Proposition 2
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors deux primitives de f diffèrent d'une constante (additive).

Théorème 2 (Théorème fondamental du calcul différentiel)
*Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction **continue** sur I et $x_0 \in I$ fixé. Alors la fonction $F : x \mapsto \int_{x_0}^x f$ est dérivable sur I de dérivée f.*

Corollaire 1
Si F est une primitive quelconque de $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ alors $\int_a^b f = F(b) - F(a)$ et si $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ alors $\int_a^b f' = f(b) - f(a)$.

Théorème 3
*Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction **continue** et **positive**. Alors $\int_a^b f = 0 \Rightarrow f = 0$.*

II.2 Rappel des formules

Théorème 4
Soient $u, v \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ *et* $a, b \in I$. *Alors*

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'.$$

Théorème 5
Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1([a,b], I)$ *et* $f :\in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. *Alors*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt = \int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du$$

III Approximations

III.1 Formules de Taylor

Théorème 6 (Formule de Taylor avec reste intégral)
Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$, $a, b \in I$. *Alors*

$$f(b) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Corollaire 2 (Inégalité de Taylor-Lagrange)
Soit $f \in \mathcal{C}^{(n+1)}(I, \mathbb{R})$ *et* $a, x \in I$. *Alors*

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \leqslant \sup_{[a,x]} |f^{(n+1)}| \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

III.2 Sommes de Riemann

Définition 5
Soit $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ *et* $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$

On appelle somme de Riemann associée à f *les sommes*

$$Rg_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\frac{b-a}{n}) \text{ et } Rd_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(a + k\frac{b-a}{n}).$$

Théorème 7
Soit $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$. *Alors les suites* $(Rg_n)_n$ *et* (Rd_n) *convergent vers* $\int\limits_a^b f$.

III.3 Méthode des trapèzes