Devoir surveillé n°8

Durée : 4H. Calculatrices interdites. **Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction et la propreté : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.**

Lisez l'énoncé attentivement et en entier **AVANT** de commencer chaque exercice.

Exercice 1 (Cours)

1. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = 2^{(-\ln(n)^2)}$.
2. Donner, suivant la valeur de $x \in \mathbb{R}$ la nature de la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} x^n$ ainsi que sa somme quand elle converge.
3. Citer l'inégalité des accroissements finis.
4. Donner un exemple d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ ainsi que sa matrice dans la base canonique.

Exercice 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, dérivable sur I, dont la dérivée f' est strictement croissante. x_0 désigne un réel de I.

1. Rappeler le théorème des accroissements finis.
2. En déduire, pour tout réel x de I distinct de x_0, l'existence d'un réel c_{x,x_0} de I tel que $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(c_{x,x_0})$.
3. On se place, dans cette question dans le cas où $x < x_0$. Montrer que
$$f(x) - f(x_0) - (x - x_0)f'(x_0) > 0$$
4. On se place, dans cette question dans le cas où $x > x_0$. Montrer que
$$f(x) - f(x_0) - (x - x_0)f'(x_0) > 0$$
5. Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0.
6. Que peut-on déduire des résultats précédents pour la représentation graphique de la fonction f.

Exercice 3

Trois mouton (Albert, Bastien et Christophe, ou plus prosaïquement A, B et C) jouent à saute mouton dans le plan :

— A saute par dessus B et se retrouve en position symétrique (B est le centre du segment [ancienne position, nouvelle position]).

— Même petit manège pour B qui saute par dessus C.

— C saute par dessus A (qui avait déjà bougé....).

Et on recommence.

La question que l'on se pose est la suivante : quelles positions doivent adopter A, B, C pour rester indéfiniment dans une partie bornée du plan ?

On rapporte le plan à un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. On note a_0, b_0 et c_0 les affixes initiales de A, B, C. Exprimer a_1, b_1 et c_1, les affixes de A, B, C après une phase de jeu (attention à la position de C) en fonction de a_0, b_0, c_0. On pourra faire un schéma.
2. On note $(a_n), (b_n), (c_n)$ les suites (dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$) des affixes de nos trois moutons. Donner des relations de récurrences liant ces suites.
3. On pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$. On pose $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.
   (a) Trouver un lien entre X_{n+1}, M et X_n.
   (b) Montrer **proprement** que $X_n = M^n X_0$.
4. Nous voilà réduit au problème de calculer une puissance de matrice. Notons $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé à M.
   (a) Montrer que $M - \lambda I_3$ est non inversible si et seulement si $\lambda^3 + 3\lambda^2 - 5\lambda + 1 = 0$.
   (b) Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, montrer que $A \notin GL_3(\mathbb{C}) \iff \ker(A) \neq \{0\}$.
   (c) En déduire qu'il existe exactement trois complexes distincts tels que $\ker(M - \lambda I_3) \neq \{0\}$. On note λ_1 celui qui est entier, λ_2 dont l'écriture fait intervenir un $+$ et λ_3 l'autre.

(d) Résoudre $MX = X$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$. On montrera que l'ensemble des solutions est une droite vectorielle et on donnera un vecteur directeur de cette droite.

(e) Montrer que $M - \lambda_2 I_3$ et $M - \lambda_3 I_3$ sont de rang 2

(f) Résoudre les équations $MX = \lambda_2 X$ et $MX = \lambda_3 X$ (donner des bases des ensembles de solutions).

(g) Montrer que $\mathcal{B} = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1+\sqrt{5} \\ 3-\sqrt{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1-\sqrt{5} \\ 3+\sqrt{5} \end{pmatrix}) = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{C}^3$.

(h) Calculer $D = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ en revenant à la définition.

(i) On note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^3$ à $\mathcal{B}$. Exhiber P.

(j) Donner l'expression de M en fonction de P et D. Calculer ensuite M^k en fonction de P et D^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

5. On a maintenant $(P^{-1}X_n) = D^n(P^{-1}X_0)$, c'est à dire que l'on a trouvé un lien très simple entre les coordonnées dans $\mathcal{B}$ de A, B, C à l'étape n et leurs coordonnées initiales dans $\mathcal{B}$.

   On note $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ les coordonnées dans $\mathcal{B}$ de X_n. Donner un lien entre X_n, P et $\begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}$.

6. Soit $q \in \mathbb{C}$. A quelle condition sur q la suite (q^n) est-elle bornée ?

7. On admet que les moutons restent dans une partie bornée du plan si et seulement si leurs coordonnées dans n'importe quelle base de $\mathbb{C}^3$ sont des suites bornées.
   Donner l'expression de $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ en fonction de $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ puis une CNS sur $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ pour que les moutons restent dans une partie bornée du plan.

8. En déduire l'ensemble des positions initiales A_0, B_0, C_0 telles que les montons restent dans une partie bornée du plan. On donnera une équation portant sur a_0, b_0, c_0 et l'ensemble des solutions de cette équation (pas forcément dans cet ordre d'ailleurs).

   Remarquez le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ qui traduit le fait que le point d'origine de nos coordonnées n'est pas important pour la solution de ce problème. Il n'y a donc (à un "facteur d'échelle" près) qu'une seule position qui permet à nos mouton de rester dans leur champ. Une question intéressante est maintenant : quelle doit être la taille de ce champ... Pour une autre fois peut-être.

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ et $f(0) = a \in \mathbb{R}$.

1. Pour quelle valeur de a la fonction f est-elle continue en 0 ?
2. Montrer qu'alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Pour le reste de l'exercice c'est cette valeur de a qui est choisie.
3. (a) On définit la fonction Δ par $\forall x \in \mathbb{R}\ \Delta(x) = \sin x - x^2$. Montrer que l'équation $\Delta(x) = 0$ possède exactement deux solutions : 0 et un réel α strictement positif.
   Justifier que $\alpha \in]0, 1]$.

   (b) Montrer que f possède un et un seul point fixe que l'on précisera.
4. (a) Montrer que $\forall x \in [0, \frac{\pi}{3}]\ \tan x \geqslant x$.

   (b) Etudier les variations de f sur $[0, \frac{\pi}{3}]$.

   (c) On pose $C = \frac{\sqrt{3}}{4}$ et la fonction $\varphi : x \mapsto x \cos x - \sin x + Cx^2$ (définie sur $\mathbb{R}$). Donner le signe de φ' sur $[0, \frac{\pi}{3}]$, puis montrer que $\varphi \geqslant 0$ sur cet intervalle.

   (d) Prouver que $\forall x \in [0, \frac{\pi}{3}]\ |f'(x)| \leqslant C$.
5. On définit la suite $(u_n)_n$ par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = f(u_n)$.

   (a) Ecrire des instructions python pour calculer u_{42}.

   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \in [0, \frac{\pi}{3}]$.

   (c) Prouver que pour tout entier naturel n on a $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant C|u_n - \alpha|$. (le α de la question **??**...)

   (d) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}\ |u_n - \alpha| \leqslant C^n$.

   (e) Montrer que la suite u converge et expliciter sa limite.

   (f) A quel condition (suffisante) sur n le terme u_n est-il une valeur approchée de la limite de u à 10^{-27} près ?

Exercice 5
On pose $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} -x-4y-4z \\ x+2y+2z \\ y+z \end{pmatrix} \end{array}\right.$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Calculer le rang de f.
3. Monter que $\ker(f) = \text{Vect}(u_1)$ avec $u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
4. On pose $g = f - Id_{\mathbb{R}^3}$. Que représente $\ker(g)$ pour l'application f ?
5. Montrer que $\ker(g) \subset \ker(g^2)$.
6. Montrer que $\ker(g^2) = \ker\left((f - Id_{\mathbb{R}^3})^2\right) = \text{Vect}(u_2, u_3)$ avec $u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
7. On pose $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
8. Calculer la matrice $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
9. Exhiber P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ (notée $\mathcal{B}_{can}$) à $\mathcal{B}$ puis P^{-1}.
10. On note A la matrice canoniquement associée à f. Donner la relation liant A, M et P puis vérifier le résultat de la question **??**.
11. On pose $M = D + N$ avec D une matrice diagonale (qui n'a que la diagonale éventuellement non nulle) et N une matrice de diagonale nulle. Montrer que $DN = ND$.
12. Calculer D^n et N^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
13. En déduire l'expression de M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
14. Trouver l'expression de f^n pour tout $n > 0$.