Exercice 1

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par produit et $f' : x \mapsto (1-x)e^{-x}$. De plus $f \underset{-\infty}{\to} -\infty$ par produit et $t \underset{+\infty}{\to} 0$ par croissances comparées.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

   Comme f est continue, d'après le TVI, $f(\mathbb{R}) =]-\infty, e^{-1}]$.
2. $A \in GL_3(\mathbb{R})$ ssi $\text{rg}(A) = 3$ ssi $\det(A) \neq 0$ ssi le seul vecteur $X \in \mathbb{R}^3$ qui vérifie $AX = 0$ est $0_{\mathbb{R}^3}$ ssi tout système de matrice A possède une unique solution.
3. On pouvait calculer un produit vectoriel (pour trouver un vecteur normal) ou poser deux paramètres et les éliminer ou encore deviner $P : x - z = 0$.
4. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction **continue**. Si $f(a)f(b) \leqslant 0$ alors $\exists c \in [a,b]\ f(c) = 0$.

Exercice 2

1. Voir le cours.
2. E est un espace vectoriel de dimension 3 dont une base est $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$.
3. Il s'agit de la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{F}$ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de la question précédente.
   Ainsi $M = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$
4. $\mathcal{F}$ n'est pas libre car elle est composée de 4 vecteurs dans un espace de dimension 3.
   De plus, $\text{rg}(M) = 3$ (échelonner !) et donc $\dim(\text{Vect}(\mathcal{F})) = 3$ ie $\mathcal{F}$ est génératrice de E.
5. Les familles (P_1, P_2) et (P_3, P_4) sont libres car composés de vecteurs non colinéaires et donc $\dim(F) = \dim(G) = 2$ et comme $P_3 \neq 0$, $\dim(D) = 1$.
6. (P_1, P_2, P_3) est une base de E et donc $E = F \oplus D$.
7. Résolvons $aX^2 + bX + c = \alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3$ d'inconnue $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Notons $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(P_1, P_2, P_3)$. En utilisant l'unicité des coordonnées dans $\mathcal{B}$ (ou encore l'unicité des coefficients des polynômes) on trouve le système $\begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et donc $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}$ avec $P^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. Nous avons calculé les coordonnées de P dans la base (P_1, P_2, P_3) ainsi que l'inverse de la matrice de passage.
8. $P \in F$ ssi $\gamma = 0$ ssi $-2c - 2b - a = 0$ ssi $a + 2b + 2c = 0$.
9. Il suffit de vérifier avec l'équation précédente. $P_4 \in F$.
10. On sait que $F + G = \text{Vect}(\mathcal{F}) = E$ d'après la question 4. Donc $\dim(F+G) = 3$ et d'après la formule de Grassmann $\dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F+G) = 1$. Or $P_4 \in F \cap G$ et est non nul donc $F \cap G = \text{Vect}(P_4)$.

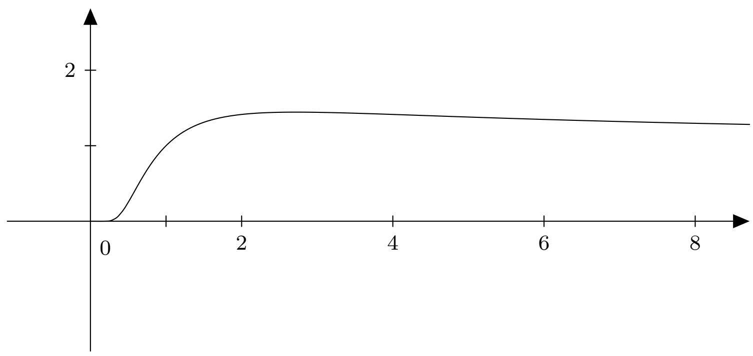
Exercice 3

Partie I

1. On remarque que $x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(x)}$ par définition et donc f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que composée d'exponentielle qui est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et de $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ qui est un quotient de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas.
2. On a $\frac{\ln x}{x} \underset{x \to 0^+}{\to} -\infty$ par quotient et donc $f \underset{0}{\to} 0$.
   Ainsi on peut poser $f(0) = 0$ et la fonction devient continue sur $\mathbb{R}_+$.
3. Soit $x > 0$. $f'(x) = \left(\frac{1 - \ln(x)}{x^2}\right) f(x)$. Donc f' est du signe de $1 - \ln(x)$.
   De plus $\frac{\ln x}{x} \underset{+\infty}{\to} 0$ par croissances comparées et ainsi $f \underset{+\infty}{\to} 1$. On en déduit le tableau de variations.

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$e^{e^{-1}}$	$\searrow$	1

4. On a pour $x > 0$, $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x^{\frac{1}{x}-1} = e^{(\frac{1}{x}-1)\ln(x)} \underset{0}{\rightarrow} 0$ pour les même raisons que $f \underset{0}{\rightarrow} 0$. Ainsi f est dérivable en 0 et sa courbe représentative admet une tangente horizontale.
5. f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $+\infty$.
6. On obtient la figure :



7. f est strictement croissante sur $]0, e]$ donc injective sur cet intervalle. De plus f est continue et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $f(]0, e]) =]0, e^{\frac{1}{e}}]$.
   Finalement f est une bijection de $]0, e]$ dans $]0, e^{\frac{1}{e}}]$.

Partie II

1. Quand $a = 1$ on a pour tout n, $u_{n+1} = 1^{u_n} = 1$ donc la suite (u_n) est constante égale à 1. Elle converge vers 1.
2. Si $u_n \underset{+\infty}{\rightarrow} h(a) \in \mathbb{R}$ alors par continuité de φ en $h(a)$ (et composition de limite d'une suite par une limite de fonction) on a $\lim u_n = \varphi(\lim u_n)$ ie $h(a) = \varphi(h(a))$.
3. On reprend l'équation précédente : $h(a) = a^{h(a)}$. Alors $h(a) > 0$ car la fonction φ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ (on a $\varphi : t \mapsto e^{t\ln(a)} > 0$).
   On peut donc prendre la puissance $\frac{1}{h(a)}$ des deux côtés de l'égalité précédente :
   $$h(a)^{\frac{1}{h(a)}} = a \text{ ou encore } f(h(a)) = a$$
4. φ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ par composition et on a pour $t \in \mathbb{R}$, $\varphi'(t) = \ln(a)a^t > 0$ car $a > 1eta^t > 0$.
   Ainsi φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
5. On a déjà $u_1 = a^{u_0} = a > 1$ donc $u_1 > u_0$. Supposons maintenant pour UN $n \in \mathbb{N}$ FIXE que $u_n < u_{n+1}$.
   Alors par stricte croissance de φ on a $\varphi(u_n) < \varphi(u_{n+1})$ ie $u_{n+1} < u_{n+2}$.
   Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n < u_{n+1}$.
6. Encore une fois on fait une récurrence. On a bien $u_0 \leqslant e$. De plus, si $u_n \leqslant e$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$ alors $u_{n+1} = a^{u_n} \leqslant a^e$ par croissance de φ. De plus $a \leqslant e^{\frac{1}{e}}$ donc $a^e \leqslant \left(e^{\frac{1}{e}}\right)^e = e$.
   Finalement par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \leqslant e$.
   (u_n) est alors croissante et majorée donc converge.
7. On prend maintenant $a > e^{\frac{1}{e}}$. Supposons que (u_n) converge vers $h(a) \in \mathbb{R}_+^*$ (d'après 3) et trouvons une contradiction. On a alors $f(h(a)) = a$. Or $e^{\frac{1}{e}}$ est le maximum de f d'après la partie 1. Ainsi f ne peut pas prendre la valeur $a > e^{\frac{1}{e}}$. Contradiction. La suite (u_n) est croissante et n'admet pas de limite finie, donc elle tend vers $+\infty$.

Exercice 4

Partie I

1. $\det(C) = \begin{vmatrix} 0 & 18 & 18 \\ 0 & 9 & 9 \\ -2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$ par opérations de combinaison sur les lignes.

2. Il s'agit de $\ker(C)$. Pour calculer une base de F on résout le système $CX = 0$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.
   Les opérations précédentes montrent que x, y sont les inconnues principales et z le paramètre. On trouve $F = \text{Vect}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi $\mathcal{B}_1 = (\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix})$ convient.

3. On vient de trouver que $\text{rg}(C) = 2$ qui est le nombre d'inconnues principales. Ainsi $\text{rg}(C) = 3 - \dim(F)$ où 3 représente le nombre d'inconnues.

4. D'après le cours, $\dim(G) = \text{rg}(C)$ (G est l'espace des colonnes de C) et $\mathcal{B}_2 = (C_2, C_3)$ convient car C_2, C_3 est une famille libre (2 vecteurs non colinéaires) dans un espace de dimension 2.

5. On a déjà trouvé (où ?) que $C_1 - 2C_2 + 2C_3 = 0$.

6. La matrice dans la base canonique de $\mathcal{B}$ est $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ qui est clairement de rang 3 (les deux dernières lignes ne sont pas colinéaires) et donc $\mathcal{B}$ est bien une base.

7. On en déduit immédiatement que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

Partie II

1. Un calcul direct quoique fastidieux montre que $Q^2 = Q$.

2. On a $Q^0 = I_3$ et par récurrence immédiate, $Q^n = Q$ pour tout $n \geqslant 1$. Ainsi $C^0 = I_3$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $C^n = 9^{n-1}C$ car $\frac{1}{9^n}C = \frac{1}{9}C$.

3. Comme $2QI_3 = I_3 \times 2Q$ on a $S^2 = (2Q - I_3)^2 = 4Q^2 - 4Q + I_3 = I_3$.

4. Soit $X \in G$. Alors $X = \alpha C_1 + \beta C_2 + \gamma C_3$ pour $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ fixés. Posons $X_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$.

   Ainsi $X = CX_1 = Q(9X_1)$ et donc $QX = Q^2(9X_1) = Q(9X_1) = CX_1 = X$.
   On pouvait bien sûr calculer directement $QX = Q(\alpha C_1 + \beta C_2 + \gamma C_3) = \ldots$.

5. Soit $X \in F$. On a $QX = \frac{1}{9}CX = \frac{1}{9}0 = 0$.

6. Un calcul direct de produit scalaire montre que $u.v = 0$ et $u.w = 0$ (notations de la question I.6) et donc $F \perp G$.

7. Soit $X \in \mathbb{R}^3$. Posons $X = X_F + X_G$ avec $X_F \in F$ et $X_G \in G$ (cf I.7). Alors $QX = QX_F + QX_G = 0 + X_G = X_G$. Or X_F est la projection orthogonale de X sur F et X_G est la projection orthogonale de X sur G (faire un schéma au besoin).
   Ainsi $X \mapsto QX$ est la fonction qui à un vecteur X associe son projeté orthogonal sur G.

8. Notons $s : X \mapsto SX$. On a alors $s(X) = 2QX - X$ pour tout $X \in \mathbb{R}^3$ et donc $s(X) - QX = QX - X$. Si on note $p(X)$ le projeté orthogonal de de X sur G on obtient $\overrightarrow{s(X)P(X)} = \overrightarrow{p(X)X}$ ou encore, $s(X)$ est le symétrique (orthogonal) de X par rapport au plan G.

Exercice 5

Partie I

1. Soit $P \in E$. Alors $\deg(P(X+1) - P(X)) \leqslant \max(\deg(P(X+1)), \deg(P(X)) = n$ et donc $\Delta_n(P) \in E$.
2. $(\alpha P + \mu Q)(X+1) = \alpha P(X+1) + \mu Q(X+1)$ par définition. Le reste est évident.
3. Il s'agit d'une récurrence, la question précédente fournissant l'initialisation avec $n = 2$.
4. Soit λ une racine de P. Alors $P(\lambda + 1) = P(\lambda) = 0$ car $P(X+1) = P(X)$. Par une récurrence immédiate, P possède une infinité de racines et donc $P = 0$.
5. On en déduit aisément que $\ker(\Delta_n) = \mathbb{R}$ l'ensemble des polynômes constants (soit nul, soit sans racine).
6. On trouve plusieurs polynômes d'image nulle (tous les polynômes constants). Ainsi δ_n n'est pas injective.
7. (a) La base canonique de $\mathbb{R}_3(X)$ est $(1, X, X^2, X^3)$. Donc $\dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$.

(b) $\Delta_3(1) = 0$, $\Delta_3(X) = 1$, $\Delta_3(X^2) = 2X + 1$, $\Delta_3(X^3) = 3X^2 + 3X + 1$. Donc la matrice demandée est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) On en déduit que $\text{Vect}(\mathcal{F}) = \mathbb{R}_2(X)$ (réduire la famille...).

(d) On cherche $Q = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $\Delta_3(Q) = X^2$. Or $\Delta_3(Q) = X^2 \iff a\Delta_3(X^3) + b\Delta_3(X^2) + c\Delta_3(X) + d\Delta_3(1) = X^2$

On trouve $3aX^2 + (3a + 2b)X + (a + b + c) = X^2$ et par unicité des coefficients, $a = \frac{1}{3}, b = -\frac{1}{2}, c = \frac{1}{6}$ et d est quelconque. Ainsi $Q(X) = \frac{1}{3}X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{6} + d$ avec d choisi pour que $Q(1) = 0$. la seule solution est $Q(X) = \frac{1}{6}(2X^3 - 3X^2 + X)$.

(e) $k^2 = Q(k + 1) - Q(k)$ car $X^2 = Q(X + 1) - Q(X)$.

Ainsi $\sum_1^n k^2 = Q(n + 1) - Q(1)$ en tant que somme télescopique. Or $Q(X) = \frac{1}{6}(X - 1)X(2X - 1)$ et on trouve bien

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$$

Partie II

1. Par produit, $\deg(B_k) = k$ et son coefficient dominant est $\frac{1}{k!}$. Ceci est aussi valable pour $k = 0$.
2. $B_1 = X$, $B_2 = \frac{X(X-1)}{2} = \frac{X^2}{2} - \frac{X}{2}$, $B_3 = \frac{X(X-1)(X-2)}{6} = \frac{X^3-3X^2+2X}{6}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $0 \leqslant n < k$ alors $B_k(n) = 0 = \binom{n}{k}$. Sinon $B_k(n) = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!}\frac{1}{k!} = \binom{n}{k}$.
4. On calcule.. On trouve $\frac{1}{k!}X(X - 1)\dots(X - k + 1) \times \underbrace{(1 + \frac{X - k}{k + 1})}_{\frac{X+1}{k+1}} = B_{k+1}(X + 1)$.
5. Pour $k = 0$ on trouve $\Delta_n(B_0) = 0$ et pour $k > 0$, $B_{k+1}(X + 1) - B_{k+1}(X) = B_k(X) = \Delta_n(B_{k+1})$ d'après la question précédente.
6. La matrice dans la base canonique est triangulaire sans coefficient nul sur la diagonale (regarder les degrés..) donc est inversible.
7. la famille $\mathcal{B}$ est échelonnée en degré donc libre à $n+1$ vecteurs dans un espace de dimension $n+1$ donc est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
8. La matrice demandée est la matrice nulle partout sauf juste au dessus de la diagonale où elle vaut 1. Son coefficient d'indice i, j vaut 1 ssi $i + 1 = j$ et 0 sinon.
9. (a) Simple vérification. En plus on donne les coefficients.

   (b) $\Delta_4(6B_4 + 6B_3 + B_2) = 6B_3 + 6B_2 + B_1 = X^3$. De plus, 1 est racine évidente de $Q_3 = 6B_4 + 6B_3 + B_2 = \frac{X^2(X-1)^2}{4}$.

   (c) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = Q_3(n + 1) - Q_3(1) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.