Exercice 1
On considère dans cet exercicercice des dés à 6 faces parfaitement équilibrés.

1. Montrer que la probabilité d'obtenir au moins un 6 en lançant 4 dés est supérieurs à $\frac{1}{2}$.
2. Montrer que la probabilité d'obtenir un double 6 en lançant 24 fois 2 dés est inférieure à $\frac{1}{2}$.

Exercice 2
On truque un jeu de carte en remplaçant une carte par un deuxième as de pique (la carte remplacée est donc choisie au hasard parmi 31).

1. On tire simultanément $n < 32$ cartes. Avec quelle probabilité s'aperçoit-on de la fraude ?
2. On prend maintenant $n = 4$ et on répète k fois avec remise l'expérience précédente. A partir de quelle valeur de k la probabilité de déceler l'arnaque est-elle > 0.9 ?
3. Troisième expérience. Le nombre de carte tirées est choisi au hasard dans un premier temps. On le note $N \in [\![2, 32]\!]$.
   (a) Calculer la probabilité que la supercherie soit découverte.
   (b) Le tricheur est démasqué. Quelle est la probabilité que $N = 5$?

Exercice 3
1. On range k objets dans n tiroirs. Quelle est la probabilité que tous les objets soient dans des tiroirs distincts ?
2. En supposant que les années bissextiles n'existent pas, à partir de combien de personne dans un groupe la probabilité qu'au moins deux d'entre elles aient le même anniversaire est supérieure à $\frac{1}{2}$? à $\frac{9}{10}$?
3. Soit $t > 0$ fixé. On reprend la question 1 avec $k_n = \lfloor t\sqrt{n} \rfloor$. On note p_n la probabilité calculée en question 1.
   (a) Montrer que pour $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $x + x^2 \leqslant -\ln(1-x) \leqslant x$.
   (b) Montrer que $\lfloor x \rfloor \underset{+\infty}{\sim} x$.
   (c) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Exercice 4
Dans une usine deux machines fabriquent le même objet. La première a une probabilité p_1 de fabriquer un objet défectueux, la seconde une probabilité p_2.

On choisit une caisse au hasard d'objets fabriqués avec une même machine. Le premier objet testé est totalement fonctionnel. Quelle est la probabilité pour que le second objet testé le soit également ?

Exercice 5
Une tortue plane se déplace chaque minute sur un triangle (ABC) de la manière suivante :

— Si elle est en A au début de la minute, elle va vers B avec la probabilité $\frac{3}{4}$ et vers C avec la probabilité $\frac{1}{4}$.
— Si elle est en B, elle va vers A avec la probabilité $\frac{3}{4}$ et en C sinon.
— Si elle est en C elle va systématiquement vers B.

On pose a_n, b_n et c_n les probabilités respectives des événements : la tortue est en A (resp B, C) au bout de n déplacements.

1. Donner la relation de récurrence liant $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ à (a_n, b_n, c_n).
2. On pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Exhiber une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = MX_n$ pour tout n.
3. En déduire que $X_n = M^n X_0$ pour tout n.
4. On pose $P = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 1 \\ 16 & -1 & -1 \\ 7 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible puis faire calculer à python la matrice $D = P^{-1}MP$.
5. En déduire l'expression de M^n en fonction de n puis celle de a_n, b_n, c_n.
6. Calculer les limites de ces suites.

Exercice 6
Montrer que même si X et Y sont indépendantes, il n'en est pas de même de $X + Y$ et $X - Y$ en général.

Exercice 7
1. Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $[a, b]$. Montrer que $E((X - a)(X - b)) \leqslant 0$ et en déduire $V(X) \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}$.
2. Soit X une variable aléatoire de loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. Calculer la variance de $(b-a)X+a$ pour $a < b$.

Exercice 8

1. Donner un lien entre $\binom{n+1}{k+1}$ et $\binom{n}{k}$ sous forme de produit.
2. Soit X une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres $n > 0$ et $p \in]0,1[$. Calculer l'espérance de $Y = \frac{1}{1+X}$.

Exercice 9

Une urne contient $n > 0$ boules noires et $b > 0$ boules blanches. Un joueur tire k boules avec remise. S'il tire une boule blanche, il gagne $g \in \mathbb{R}_+^*$ points, sinon il perd 1 point. Quelle valeur de g faut-il choisir pour que le jeu soit d'espérance nulle ? Quelle est alors la variance du nombre de point gagnés ?

Exercice 10

1. Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, \dots, x_n$ avec $x_1 < s_2 < \cdots < x_n$.
   (a) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Simplifier $\mathbb{P}(X > x_k) - \mathbb{P}(X > x_{k+1})$.
   (b) En déduire $E(X) = x_1 + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X > x_k)(x_{k+1} - x_k)$.
2. On lance n fois un dé à 6 faces et on note M_n la valeur maximale obtenue.
   (a) Calculer $\mathbb{P}(M_n \leqslant k)$ pour les k convenables.
   (b) En déduire $E(M_n)$ ainsi que sa limite quand $n \to +\infty$.
   (c) A partir de quel n a-t-on $E(M_n) \geqslant 5$?

Exercice 11

On souhaite tester le sang de N personnes à la recherche d'un virus dont on sait qu'il affect une personne avec une probabilité $p \in]0,1[$, indépendamment des autres. Pour réaliser ces tests on à la choix entre deux protocoles :

— Méthode 1 : on teste tous les échantillons un par un.

— Méthode 2 : On regroupe les N échantillons par groupe de n (avec $n|N$). On effectue un test par groupe en mélangeant le sang des n individus. Si le test est positif (au moins un cobaye est atteint...) on teste tous les échantillons du groupe.

1. On note X le nombre de groupes positifs. Préciser la loi de X.
2. Soit Y la variable aléatoire représentant le nombre de total de tests que l'on effectue en utilisant la deuxième méthode. Calculer l'espérance de Y.
3. Comparer cette espérance à la méthode 1 avec $N = 1000$, $n = 10$, $p = \frac{1}{1000}$.
4. Calculer la variance de Y.

Exercice 12

On dispose d'une pièce truquée qui tombe sur pile avec un probabilité $p \in]0,1[$. On lance cette pièce n fois et on note X la fréquence d'apparition de pile. A partir quelle valeur de n la probabilité pour que X soit une approximation de p à 10^{-2} près est-elle $\geqslant 0,9$?