I Périodicité

Exercice 1
Déterminer une période (la plus petite possible) pour les fonctions :

1. $x \mapsto \sin(2x)$
2. $x \mapsto \cos\left(\frac{2x}{3}\right)$.

Exercice 2
Etudier la fonction $f : x \mapsto \frac{\cos x}{\sin x}$. *(On l'appelle généralement cotangente).*

II Application des formules trigonométriques

Exercice 3
Calculer $\cos\frac{\pi}{8}$ *et* $\sin\frac{\pi}{8}$. *En déduire une expression simple de* $(\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}})^8$.

Exercice 4
Résoudre dans $\mathbb{R}$ *les équations/inéquations suivantes d'inconnue* x *:*

1. $\cos 2x - \sin x = 0$
2. $\cos 2x + \cos x \leqslant 0$.
3. $\sqrt{3}\cos x - \sin x \leqslant 1$.
4. $\cos 2x = \cos 3x$

III Exponentielle

Exercice 5
Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

1. *Calculer* $\cos a\cos b, \sin a\cos b, \sin a\sin b$ *sans faire intervenir de produit (à part par des constantes).*
2. *En déduire une expression sans produit de fonctions pour* $\cos^2(a)$.
3. *Calculons* $\int\limits_0^{2\pi}\cos^4(t)\,dt$. *Pour cela on souhaite linéariser* $\cos^4(a)$*, c'est à dire obtenir une expression ne faisant intervenir que des sommes et éventuellement des produits par des constantes.*
4. *Méthode 2*
   (a) *On pose* $z = e^{ia}$. *Exprimer* $2\cos a$ *en fonction de* z.
   (b) *Simplifier, pour* $n \in \mathbb{Z}$, $z^n + z^{-n}$.
   (c) *En utilisant les deux résultats précédents, calculer* $(2\cos a)^4$ *puis retrouver le résultat de la question 3*

Exercice 6
Résoudre l'équation complexe $\frac{z+1}{z-1} = e^{i\theta}$ *pour* $\theta \in \mathbb{R}$ *fixé et* $z \neq 1$ *l'inconnue.*

Exercice 7
Soit $n \in \mathbb{N}, n > 2$.

1. *Calculer* $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right)$.
2. *Calculer* $\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-1-k}\sin(\frac{2k\pi}{n})$.
3. (a) *Soit* $x \in \mathbb{R}$. *Calculer* $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(kx)$.
   (b) *Appliquer le premier résultat à* $x = 0, x = \pi, x = \frac{\pi}{2}$ *pour trouver la valeurs de certaines sommes.*

IV Trigonométrie réciproque

Exercice 8
Calculer $\arcsin(\sin\pi), \arcsin(\sin(-\frac{2\pi}{3})), \arctan(\tan(2\pi)), \tan(\arctan(\frac{\pi^2}{6})), \sin(\arccos(x))$ *pour tout* x *dans un domaine à préciser.*

Exercice 9
Simplifier les expressions (après avoir précisé leurs domaines de définitions...) :

$$\cos(\arctan x),\ \sin(\arctan x)$$

.

Exercice 10
Calculer $\arcsin\frac{1}{4} + \arcsin\frac{1}{3}$.

V Etude de fonctions

Exercice 11
Soit $x \neq 0$. *On considère le point* $M_x : \begin{pmatrix} x\,\mathrm{sh}(x) \\ x \end{pmatrix}$. *Exprimer l'angle* $\theta(x)$ *entre* $\vec{\imath}$ *et* $\overrightarrow{OM_x}$ *et étudier les variations et limites de la fonction* $x \mapsto \theta(x)$.

Exercice 12
Ensemble de définition + dérivabilité + dérivée de

1. $f : x \mapsto \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$
2. $f : x \mapsto \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$
3. $f : x \mapsto 2\arctan(e^x)$.

Exercice 13
Soit $a \in \mathbb{R}$ *fixé. Etudier la fonction* $f : x \mapsto \arctan(\frac{x+a}{1-ax}) - \arctan(x)$.