Exercice 1

Partie I

1. On a facilement, pour $P, Q \in \mathbb{R}_3[X], \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\varphi(\alpha P + \beta Q) = \alpha\varphi(P) + \beta\varphi(Q)$.
2. On cherche Q_1 tel que $Q_1(0) = Q_1(1) = 0$. De plus $Q_1'(0) = 0$ donc 0 est racine double de Q_1. Ainsi $Q_1 = aX^2(X-1)$ avec a le coefficient dominant de Q_1. Comme $Q_1(-1) = 1$, on trouve $a = -\frac{1}{2}$. Finalement, $Q_1 = \frac{X^2(1-X)}{2}$.
3. Cette fois $Q_2 = (X+1)(X-1)P_2(X)$ où $\deg(P_2) \leqslant 1$. Notons $P_2 = aX + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ à trouver. $Q_2 = (X^2-1)(aX+b) = aX^3 + bX^2 - aX - b$. Or $Q_2(0) = 1$ donc $b = -1$. De plus, $Q_2'(0) = 0$ donc $-a = 0$. Ainsi $Q_2 = 1 - X^2$.
4. On a directement $\varphi(Q_3) = (0,0,1,0)$ et $\varphi(Q_4) = (0,0,0,1)$.
5. L'image par φ de la famille (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) est libre donc cette famille est libre (l'image par une application linéaire d'une famille liée est liée). Ainsi $(Q_i)_{i\in[\![1,4]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ car cet espace est de dimension 4.

   On en déduit que φ est bijective.

Partie II

1. On sait que φ est bijective donc P_f existe et est unique.

   De plus, $P_f = f(-1)Q_1 + f(0)Q_2 + f(1)Q_3 + f'(1)Q_4$ convient clairement par linéarité de φ.
2. P_f est de classe $\mathbb{C}^4$, A est une constante, donc δ est de classe $\mathcal{C}^4$ par différence.
3. On remarque que P_f et f ont 3 valeurs en commun et $t \mapsto t^2(t^2-1)$ s'annule en 0, 1, -1. Ainsi δ s'annule en $0, 1, -1$. De plus, par définition de A, δ s'annule en x aussi.

   Clairement, δ' s'annule en 0 car $P_f'(0) = f'(0)$ et 0 est racine double de $X^2(1-X^2)$.
4. δ est continue et dérivable sur $[-1,0]$, $\delta(0) = \delta(-1)$, donc d'après le théorème de Rolle, δ' s'annule en $a_1 \in]-1,0[$. De même δ' s'annule en $b_1 \in]0,x[$ et $c_1 \in]x,1[$. Finalement δ' s'annule en $0, a_1, b_1, c_1$ (ordre **strictement** croissant).

   On applique encore le théorème de Rolle à δ' pour trouver 3 points d'annulation de δ'' : $a_2 < b_2 < c_2$. $\delta^{(3)}$ s'annule donc au moins 2 fois et $\delta^{(4)}$ au moins une fois.
5. $f^{(4)}$ est continue sur le **segment** [-1, 1] donc est bornée (et atteint ses bornes). Ainsi M existe.

   Remarquons de plus que $P_f^{(4)} = 0$, $(X^2(1-X^2))^{(4)} = -24$. Notons α le point d'annulation de $\delta^{(4)}$ exhibé ci-dessus. On a $\delta^{(4)}(\alpha) = f^{(4)}(\alpha) + 24A = 0$. Ainsi $A = -\frac{f^{(4)}(\alpha)}{24}$ et donc $|A| \leqslant \frac{M}{24}$. La définition de A donne alors $|f(x) - P_f(x)| \leqslant \frac{|x^2(1-x^2)|}{24}M = \frac{x^2(1-x^2)}{24}M$ car $1 - x^2 \geqslant 0$.
6. Si k est impair alors $\int\limits_{-1}^{1} x^4 \mathrm{d}x = 0$. Si k est pair, alors $\int\limits_{-1}^{1} x^k \mathrm{d}x = \frac{2}{k+1}$

   De plus, $\int\limits_{-1}^{1} x^2(1-x^2)\mathrm{d}x = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$.

   On a aussi $\int\limits_{-1}^{1} P_f(t)\mathrm{d}t = f(-1)\int\limits_{-1}^{1} Q_1(t)\mathrm{d}t + f(0)\int\limits_{-1}^{1} Q_2(t)\mathrm{d}t + f(1)\int\limits_{-1}^{1} Q_3(t)\mathrm{d}t + f'(0)\int\limits_{-1}^{1} Q_4(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{3}f(-1) + \frac{4}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(-1) + 0$
7. On a

$$\left|\int\limits_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t - \frac{f(-1) + 4f(0) + f(1)}{3}\right| = \left|\int\limits_{-1}^{1} (f(t) - P_f(t))\mathrm{d}t\right| \leqslant \int\limits_{-1}^{1} |f(t) - P_f(t)|\mathrm{d}t \leqslant \int\limits_{-1}^{1} \frac{t^2(1-t^2)}{24}M\mathrm{d}t = M\frac{4}{15}\frac{1}{24} = \frac{M}{90}$$

   où on a utilisé dans l'ordre pour les inégalités : l'inégalité triangulaire et la croissance de l'intégrale.
8. Pour cette fonction on a $M = 24$ De plus $\int\limits_{-1}^{1} t^4 \mathrm{d}t = \frac{2}{5}$, $\frac{f(-1)+4f(0)+f(1)}{3} = \frac{2}{3}$ et on a bien $\frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15} = \frac{M}{90}$.

Partie III

1. On prend $\psi : t \mapsto \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}$. qui est bien bijective de réciproque $x \mapsto \frac{2x-a-b}{b-a}$.

   Alors $g : t \mapsto f(\psi(t)) = f(\frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2})$ convient.

2. On applique II.7 à g. Or $g(-1) = f(a), g(0) = f(\frac{a+b}{2}), g(1) = f(b)$ par définition de g. De plus, $g \in \mathcal{C}^4$ par composition et $g^{(4)} : t \mapsto \left(\frac{b-a}{2}\right)^4 f^{(4)}(\frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2})$. Ainsi $\sup\limits_{[-1,1]}(g^{(4)}) = \frac{(b-a)^4}{32}\sup\limits_{[a,b]}(f^{(4)})$.

   On a pour l'instant, $\left|\int\limits_{-1}^{1} g(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{3}(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b))\right| \leqslant \frac{1}{90}\frac{(b-a)^4}{16}M$. Or $\int\limits_{-1}^{1} g(t)\mathrm{d}t = \int\limits_{a}^{b} g(\frac{2x-a-b}{b-a})\frac{2}{b-a}\mathrm{d}x$ en posant $t = \frac{2x-a-b}{b-a}$. Ainsi $\int\limits_{-1}^{1} g(t)\mathrm{d}t = \frac{2}{b-a}\int\limits_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$.

   en multipliant l'inégalité obtenue précédemment par $\frac{b-a}{2} > 0$ on obtient bien ce qui est voulu car $90 \times 32 = 2880$.

3. Remarquons que pour $k \in [\![1, n]\!]$, $\frac{x_{2k}+x_{2k+2}}{2} = x_{2k+1}$.

   De plus, $\int\limits_a^b f = \sum\limits_{k=0}^{n-1}\int\limits_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(t)\mathrm{d}t$. Or

$$\left|\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(t)\mathrm{d}t - \frac{x_{2k+2} - x_{2k}}{6}(f(x_{2k}) + 4f(x_{2k+1}) + f(x_{2k+2}))\right| \leqslant M\frac{(x_{2k+2} - x_{2k})^5}{2880}$$

   Comme $x_{2k+2} - x_{2k} = \frac{b-a}{n}$, en appliquant l'inégalité triangulaire (pour les sommes) et en sommant de 0 à $n-1$:

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{6n}\sum_{k=0}^{n-1}(f(x_{2k}) + 4f(x_{2k+1}) + f(x_{2k+2}))\right| \leqslant n\frac{(b-a)^5}{2880n^5}M$$

   qui est l'inégalité demandée.