Exercice 1

1. La famille $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ convient.
2. On trouve $X^3-2X+1=(X-2)(X^2+2X+2)+5$
3. Soit $x>-1$ et non nul. $\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)}=\frac{\ln(x+1)-x}{x\ln(1+x)}$. Or $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o_0(x^2)$ donc $x\ln(1+x)\underset{0}{\sim}x^2$ et $\ln(1+x)-x\underset{0}{\sim}-\frac{x^2}{2}$. Par quotient d'équivalent, la limite cherchée vaut $-\frac{1}{2}$.
4. ON trouvait par développement, un degré 3 et un coefficient dominant égal) 8.
5. La suite $((-\frac{1}{2})^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone mais converge vers 0. La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée sans être convergente.
6. Notons $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ un vecteur normal à $\mathcal{P}$ et H le projeté de M sur $\mathcal{P}$. Alors $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HM}$ où $\overrightarrow{OH}\in\mathcal{P}$ car $\mathcal{P}$ passe par O et $\overrightarrow{HM}\perp\mathcal{P}$. Ainsi $\overrightarrow{HM}=\alpha\vec{n}$ pour un $\alpha\in\mathbb{R}$ à trouver. Donc $\overrightarrow{OM}.\vec{n}=0+\overrightarrow{HM}.\vec{n}=\alpha\|\vec{n}\|^2=3\alpha$ et $\alpha=\frac{x+y+z}{3}$. Or $M-H=\alpha\vec{n}$ donc $H=M-\alpha\vec{n}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\frac{x+y+z}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2x-y-z\\-x+2y-z\\-x-y+2z\end{pmatrix}$. Dans notre cas, on trouvais $\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{-4}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$

   On en déduit la distance de M à $\mathcal{P}$ qui est $\|\overrightarrow{HM}\|=\|\alpha\vec{n}\|=|\alpha|\sqrt{3}=\frac{|x+y+z|}{\sqrt{3}}$ (cf exo 5). Pour l'application numérique on obtenait $\frac{1}{\sqrt{3}}$

Exercice 2

1. Pour cela on résout le système d'équations de $\mathcal{D}$. En posant z comme paramètre on trouve $2y=-z+8,\ 3x=\frac{3}{2}z-3,\ z=z$ et donc $\mathcal{D}=\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}+\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}+\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$. On pose donc $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$.

   On pouvait trouver pour $\vec{u}$ n'importe quel vecteur colinéaire et non nul.
2. Calculons $\vec{w}=\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$. Alors $M:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathcal{P}\iff\det(\overrightarrow{AM},\vec{w},\vec{v})=0\iff 3x+5y-6z-13=0.$
3. $\mathcal{D}'=A+\mathrm{Vect}(\vec{v})$. Or $A\in\mathcal{P}$ et $\vec{v}$ est dans la direction de $\mathcal{P}$ donc $\mathcal{D}'\subset\mathcal{P}$.

   De plus $\begin{pmatrix}3\\5\\-6\end{pmatrix}$ est normal à $\mathcal{P}$ mais non orthogonal à $\vec{u}$ (pour tout choix de $\vec{u}$) donc $\mathcal{D}$ n'est pas parallèle à $\mathcal{P}$ et l'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ est un point.
4. On cherche un point de $\mathcal{D}$ noté $M=\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}+\lambda\vec{u}$ pour un certain $\lambda\in\mathbb{R}$ qui soit aussi dans $\mathcal{P}$, ie. dont les coordonnées vérifient l'équation trouvée précédemment.

   Ainsi $3(-1+\lambda)+5(4-\lambda)-6(0+2\lambda)-13=0$ et donc $-14\lambda=-4$ et donc $\lambda=\frac{2}{7}$.

   Finalement le point B est de coordonnées $\begin{pmatrix}\frac{-5}{7}\\\frac{26}{7}\\\frac{4}{7}\end{pmatrix}$.
5. $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}''$ sont concourantes par construction de $\mathcal{D}''$ (se coupent au point B au moins) et leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux par construction de $\vec{w}$. Ainsi $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}''$ sont perpendiculaires.

   On a $B\in\mathcal{P}$ et $\vec{w}$ est dans la direction de $\mathcal{P}$ donc $\mathcal{D}''\subset\mathcal{P}$. Ainsi $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$ sont orthogonales ($\vec{v}\perp\vec{w}$) et dans un même plan donc concourantes.

   Finalement $\mathcal{D}''$ est bien perpendiculaire à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.
6. C'est le point B. Il y avait une coquille dans l'énoncé. Je voulais demander l'intersection de $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$.

   Il fallait écrire le point C d'intersection comme $A+\lambda\vec{u}=B+\mu\vec{w}$ et trouver un système compatible à 3 équations à 2 inconnues. Trouver la valeur d'une des deux suffit.
7. Il faut pouvoir construire le vecteur $\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}$ comme vecteur de base d'un plan et directeur de droite. Ainsi il faut que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient non colinéaires.

   Tous les raisonnement tiennent alors (seuls les calculs de coordonnées changent) et cette condition est suffisante.

Exercice 3

Partie I

1. Les 6 solutions sont

Enfant 1	Enfant 2	Enfant 3
c_1	c_2	c_3
c_1	c_3	c_2
c_2	c_1	c_3
c_2	c_3	c_1
c_3	c_1	c_2
c_3	c_2	c_1

Remarque : on a adopté un ordre qui ressemble à l'ordre alphabétique.

2. $D_1 = 0$ car il n'y a qu'un cadeau à distribuer. Aucune chance de se tromper, même pour le plus mauvais des pères Noël.
   $D_2 = 1$ car il y a 2 manières de distribuer les 2 cadeaux, mais une seule est la bonne.
   $D_3 = 2$ car le premier enfant doit recevoir un mauvais cadeau. il y a deux possibilités et il reste deux cadeaux à distribuer. L'un des deux cadeaux est celui de l'enfant 2 ou celui de l'enfant 3 qui doit donc recevoir l'autre. 1 possibilité ici. Il ne reste qu'une cadeau à distribuer.
3. On a d'après la formule $D_4 = 3(D_3 + D_2) = 9$ et $D_5 = 4(D_4 + D_3) = 44$.
4. On a pour $n \geqslant 0$, $v_{n+1} = D_{n+2}-(n+2)D_{n+1} = (n+1)D_{n+1}+(n+1)D_n-(n+2)D_{n+1} = (n+1)D_n-D_{n+1} = -v_n$. Ainsi (v_n) est géométrique de raison -1.
5. Comme $v_1 = D_2 - 2D_1 = 1$, $v_n = (-1)^{n+1}$ pour tout n et on en déduit immédiatement d'après l'expression de v_n que
$$D_{n+1} = (n + 1)D_n + (-1)^{n+1}.$$
6. On a $1!D_1 = 1 \times 0 = 0$ et $\frac{(-1)^0}{0!} + \frac{(-1)^1}{1!} = 0$. Ainsi la formule proposée est vraie au rang 1.
   Supposons pour un $n \geqslant 1$ fixé que $D_n = n! \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
   Alors $D_{n+1} = (n + 1)D_n + (-1)^{n+1} = (n + 1)! \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} + (-1)^{n+1}\frac{(n+1)!}{(n+1)!}$. Il suffit de factoriser par $(n + 1)!$.
   Finalement par récurrence, $D_n = n! \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

Partie II

1. On a $\forall n \in \mathbb{N} f_n(1) = e^1 p_n$. On veut étudier la limite de $(f_n(1))$ quand $n \to +\infty$. Si elle existe, elle vaut e fois la limite de p_n
2. Le cas $n = 0$ est trivial.
   On sait qu'un somme de deux fonctions dérivable est dérivable et la dérivée de la somme est la somme des dérivées (ce qui constitue le cas $n = 1$).
   Supposons la propriété acquise pour $n \geqslant 1$. Soient $g_0, \dots, g_{n+1}$ des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Alors $\sum\limits_{i=1}^{n+1} g_i = \sum\limits_{i=1}^{n} g_i + g_{n+1}$ est dérivable par hypothèse de récurrence et d'après le cas $n = 2$. De plus, la dérivée (cas n = 2 et hypothèse de récurrence) vaut $\sum\limits_{i=1}^{n} g_i' + g_{n+1}' = \sum\limits_{i=1}^{n+1} g_i'$.
   Finalement, par récurrence, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{i=1}^{n} g_i$ est dérivable de dérivée $\sum\limits_{i=1}^{n} g_i'$
3. f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ par produit (exponentielle et une fonction polynomiale de degré n) et on a pour $x \in \mathbb{R}$: $f_n'(x) = f_n(x) + e^x \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{-k(-x)^{k-1}}{k!} = f_n(x) - e^x \sum\limits_{j=0}^{n-1} \frac{(-x)^j}{j!} = e^x \frac{(-x)^n}{n!}$.
   Remarquer que le terme pour $k = 0$ disparaît par dérivation d'une constante.
4. D'après l'expression précédente $|f_n'(x)| = \frac{|e^x(-x)^n|}{|n!|} = e^x \frac{x^n}{n!}$ car $x \geqslant 0$. Or pour $x \in [0, 1]$, $e^x \leqslant e$ et $x^n \leqslant 1$ donc
$$|f_n'(x)| \leqslant \frac{e}{n!}.$$
5. On a $|f_n(1) - f_n(0)| = \left|\int\limits_0^1 f_n'(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int\limits_0^1 |f_n'(t)|\mathrm{d}t \leqslant \frac{e}{n!}$.

6. On remarque que $f_n(0)=1$ pour tout n et donc, comme $\frac{e}{n!} \underset{+\infty}{\to} 0$ on trouve $f_n(1) \underset{+\infty}{\to} 1$ soit encore $p_n \underset{+\infty}{\to} \frac{1}{e}$.
7. D'après 4 et en remarquant que $f_n(1) = ep_n$ on a $|p_n - \frac{1}{e}| \leqslant \frac{1}{n!}$. Donc si $\frac{1}{n!} < 10^{-2}$ alors p_n est une approximation de sa limite à 10^{-2} près.
   Pour $n=5$ on a $5! = 120$ et donc $\frac{1}{5!} < 0.01$. Ainsi $\frac{D_5}{5!}$ est une approximation à 10^{-2} près de $\frac{1}{e}$ c'est à dire $\frac{1}{e} \approx \frac{44}{120} = \frac{11}{30}$.

Exercice 4

Partie I

1. On a $u_1 = 4 \times \frac{2}{9} = \frac{8}{9}$ et $u_2 = \frac{43}{9} \times \frac{9}{44} = \frac{43}{44}$.
2. f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-4\}$. De plus, si on avait un $x \in \mathbb{R}\backslash\{-4\}$ tel que $f(x) = 2$ alors $2x+3 = 2\times(x+4)$ ie $3 = 8$ ce qui n'est pas. Donc $2 \notin \mathrm{Im}(f)$
3. f est dérivable sur son ensemble de définition en tant que quotient dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, pour $x \in \mathbb{R}$ différent de -4,
$$f'(x) = \frac{2(x+4)-(2x+3)}{(x+4)^2} = \frac{5}{(x+4)^2}$$
   Ainsi f est strictement croissante sur $]-\infty,-4[$ et strictement croissante sur $]-4,+\infty[$.
   En outre $\lim\limits_{-4^-} f = +\infty$, $\lim\limits_{-4^+} f = -\infty$ et $f(x) \underset{\pm\infty}{\sim} \frac{2x}{x} = 2$ donc $\lim\limits_{\pm\infty} f = 2$.

4. f est strictement croissante sur $]-4,+\infty[$ donc est injective. De plus, d'après le tableau de variations (f étant continue), $f(]-4,+\infty[) =]-\infty, 2[$.
   Ainsi f réalise une bijection de $]-4,+\infty[$ dans $]-\infty,2[$.
   Explicitons la réciproque de f. Soit $y \in]-\infty, 2[$, cherchons le $x \in]-4,+\infty[$ tel que $y = f(x)$.
$$y = \frac{2x+3}{x+4} \iff (x+4)y = 2x+3 \iff x(y-2) = 3-4y \iff x = \frac{3-4y}{y-2}$$
   car $y \neq 2$.
   Finalement, la réciproque de $f_{|]-4,+\infty[}$ est $f^{-1} : \left\{ \begin{array}{rcl}]-\infty,2[& \to &]-4,+\infty[\\ y & \mapsto & \frac{3-4y}{y-2} \end{array} \right.$.
5. Soit $x > 0$. Alors $2x+3 > 0$ et $x+4 > 0$ donc $f(x) > 0$.
6. $u_0 = \frac{1}{2} > 0$. Supposons que le nombre u_n existe et que $u_n > 0$ pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé.
   Montrons que u_{n+1} est bien défini et que $u_{n+1} > 0$. Comme $u_n > 0$, $f(u_n)$ est bien défini (car en particulier $u_n \neq -4$) et $f(u_n) = u_{n+1} > 0$ d'après la question précédente.
   Par récurrence, la suite (u_n) est bien définie (et est strictement positive d'ailleurs).
7. On remarque que $p_0 = 1$ et $q_0 = 2$ conviennent.
   Supposons pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé que $u_n = \frac{p_n}{q_n}$. Alors $u_{n+1} = \frac{2p_n+3q_n}{p_2+4q_n}$ et si on pose $p_{n+1} = 2p_n + 3q_n$ et $q_{n+1} = p_n + 4q_n$ alors $p_{n+1}, q_{n+1} \in \mathbb{N}$ par somme et $u_{n+1} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$.
   Finalement, par récurrence, on peut poser $u_n = \frac{p_n}{q_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $p_0 = 1, q_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $p_{n+1} = 2p_n + 3q_n$ et $q_{n+1} = p_n + 4q_n$.
   On trouve ainsi que $p_1 = 8$ et $q_1 = 9$ ce qui est cohérent avec le résultat d'introduction.

Partie II

1. On a $a_1 = 8, b_1 = 9, a_2 = 43, b_2 = 44$.
2. On remarque que $a_0, b_0 \in \mathbb{N}$ et si $a_n, b_n \in \mathbb{N}$ et sont non nuls pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé alors il en est de même pour a_{n+1} et b_{n+1} par somme.
   Par récurrence (initialisée à la question 1), $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n, b_n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.
3. On a $b_0 - a_0 = 1$ et pour pour $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} - a_{n+1} = a_n + 4b_n - 2a_n - 3b_n = b_n - a_n$ donc la suite à étudier est constante.
   Ainsi $b_n - a_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Si $d|b_{n+1}$ et $d|a_{n+1}$ alors $d|b_{n+1} - a_{n+1}$. Or le seul diviseur positif de 1 est 1 donc $d = 1$.

Le problème réglé ici est celui de la bonne définition des suites (p_n) et (q_n) : on peut maintenant dire que ce sont les numérateurs et dénominateurs de la fraction réduite u_n. Si on ne le fait pas, il existe une infinité de valeurs possibles pour p_n et q_n pour chaque n.

Partie III

1. L'équation caractéristique de la relation (E) est $r^2 = 6r - 5$ ie $r^2 - 6r + 5 = 0$ dont les solutions sont 1 et 5. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $v_n = \lambda + \mu 5^n$ avec λ et $\mu \in \mathbb{R}$ à déterminer.
Or $v_0 = \lambda + \mu$ et $v_1 = \lambda + 5\mu$ ainsi $4\mu = v_1 - v_0$ ie $\mu = \frac{v_1 - v_0}{4}$ et donc $\lambda = \frac{5v_0 - v_1}{4}$. Finalement
$$v_n = \frac{1}{4}\left((5v_0 - v_1) + (v_1 - v_0) \times 5^n\right)$$
pour tout $n \in \mathbb{N}$
2. Si $v_1 = v_0$ alors la suite (v_n) est constante égale à v_0.
Sinon, $(5v_0 - v_1) = o_{+\infty}(5^n)$ et donc $v_n \underset{+\infty}{\sim} (v_1 - v_0)5^n$.

Partie IV

Soit $n \in \mathbb{N}$

1. On remarque que $X_{n+1} = \begin{pmatrix} 2p_n + 3q_n \\ p_n + 4q_n \end{pmatrix} = AX_n$.
2. Calculons $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 18 \\ 6 & 19 \end{pmatrix} = 6A - 5I_2$.
3. D'après la question précédente, $(A^2 - 6A + 5I_2)X_n = 0X_n = 0$.
D'après la question 1, $(A^2 - 6A + 5I_2)X_n = A^2X_n - 6AX_n + 5X_n = X_{n+2} - 6X_{n+1} + 5X_n$.
Ainsi (p_n) et (q_n) vérifient la relation (E).
4. On en déduit immédiatement que $p_n = \frac{-3+7\times 5^n}{4}$ et donc $q_n = p_n + 1 = \frac{1+7\times 5^n}{4}$. On en déduit que $u_n = \frac{7\times 5^n - 3}{7\times 5^n + 1}$.
5. D'après la question 2 de la partie précédente,$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{7\times 5^n}{7\times 5^n} = 1$ donc $u_n \to 1$.

Partie V

1. $f(l) = l \iff 2l + 3 = l(l+4) \iff l^2 + 2l - 3 = 0 \iff l = 1$ ou $l = -3$. Ainsi $l_1 = -3$ et $l_2 = 1$.
2. Soit $x \neq -4$. $f(x) - l_2 = f(x) - 1$ est nul ssi $2x + 3 = x + 4 \iff x = 1$. On pouvait aussi voir que $f(1) = 1$ et d'après le tableau de variations, 1 est le seul antécédent de 1 par f.
On prend donc $x \in \mathbb{R}\backslash\{-4, 1\}$.
$$\frac{f(x)+3}{f(x)-1} = \frac{2x+3+3(x+4)}{2x+3-(x+4)} = \frac{5x+15}{x-1} = 5\frac{x+3}{x-1}$$
3. Remarquons que, d'après le tableau de variations de f, si $0 < u_n < 1$ alors $0 < u_{n+1} < 1$ et $u_0 \in]0,1[$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \in]0,1[$ (par récurrence). En particulier $u_n \neq 1$ pour tout n.
Alors $v_{n+1} = \frac{f(u_n)+3}{f(u_n)-1} = 5\frac{u_n+3}{u_n-1} = 5v_n$ et (v_n) est bien géométrique (de raison 5 d'ailleurs).
4. On a $v_n = v_0 \times 5^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $v_0 = \frac{u_0+3}{u_0-1} = -7$.
De plus, $v_n(u_n - 1) = u_n + 3$ et donc $u_n(v_n - 1) = 3 + v_n$. Comme $v_n \neq 1$ (d'après son expression)
$$u_n = \frac{3 - 7\times 5^n}{-1 - 7\times 5^n} = \frac{7\times 5^n - 3}{7\times 5^n + 1}$$

Exercice 5

1. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a $a(t) + c(t) = \frac{\cos t}{\sqrt{2}} - \frac{\cos t}{\sqrt{2}} = 0$ donc les coordonnées de $N(t)$ vérifient l'équation de $\mathcal{P}$. Ainsi $N(t) \in \mathcal{P}$.
2. Soit $t \in \mathbb{R}$
$$a(t)^2 + b(t)^2 + c(t)^2 = \frac{\cos^2(t)}{2} + \sin^2(t) + \frac{\cos^2(t)}{2} = 1$$
Donc $N(t)$ est sur la sphère de centre O et de rayon 1. De plus $N(t) \in \mathcal{P}$ et $O \in \mathcal{P}$, donc $N(t)$ est sur le cercle de $\mathcal{P}$ de centre O et de rayon 1.
3. Ces plans ne sont pas parallèles car $\vec{n}_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (un vecteur normal de $\mathcal{P}$) et $\vec{n}_2 : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (un vecteur normal de $\mathcal{Q}$) ne sont pas colinéaires.
Ces plans ne sont pas confondus non plus car O n'est pas dans $\mathcal{Q}$.

4. — Méthode 1 : un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est $\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$. De plus un point commun à $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ est $\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$. Donc une équation paramétrique de $\mathcal{D}$ est $\begin{cases} x = -t \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases}$

   — Méthode 2 : on pose $x = t$ (un paramètre) dans le système $\begin{cases} x + z = 0 \\ x + y + z - 3 = 0 \end{cases}$. On trouve immédiatement $\begin{cases} x = t \\ y = 3 \\ z = -t \end{cases}$.

5. Soit $t \in \mathbb{R}$. Si $N(t) \in \mathcal{D}$ alors $b(t) = 3$. Or $b(t) = \sin t$, donc $N(t)$ ne peut pas appartenir à $\mathcal{D}$.
6. $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ est l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $|\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$ est le volume du parallélépipède construit sur $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.
7. $\mathcal{Q} = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix})$ par résolution du système à 1 équation et 3 inconnues.
8. $|\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v})|$ est le volume du parallélépipède construit sur $\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}$ c'est à dire l'aire de la base (parallélogramme construit sur $\vec{u}, \vec{v}$) multiplié par la hauteur (distance de M au plan). D'où la formule.
9. Raisonnement similaire : une aire de parallélogramme égale la longueur de la base ($\|\vec{w}\|$) multiplié par la hauteur (distance de M à la droite).
10. Soit $t \in \mathbb{R}$. Après calcul du déterminant (voir le cours)

$$d(N(t), \mathcal{Q}) = \frac{|a(t) + b(t) + c(t) - 3|}{\sqrt{3}} = \frac{|sin(t) - 3|}{\sqrt{3}} = \frac{3 - \sin(t)}{\sqrt{3}}.$$

   On a également, si on note $\vec{u} : \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et $B : \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$ un point de $\mathcal{D}$, $d(N(t), \mathcal{D}) = \frac{\|\overrightarrow{BN(t)} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$.

   Or $\overrightarrow{BN(t)} \wedge \vec{u} = \begin{pmatrix}\frac{\cos t}{\sqrt{2}}\\ \sin(t) - 3 \\ -\frac{\cos t}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin t - 3\\0\\3 - \sin t\end{pmatrix} = (3 - \sin t)\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$. Comme $3 - \sin t > 0$, $\|\overrightarrow{BN(t)} \wedge \vec{u}\| = (3 - \sin t)\sqrt{2}$. Finalement

$$d(N(t), \mathcal{D}) = 3 - \sin t$$

   On retrouve le fait que $N(t) \notin \mathcal{D}$ car cette distance est toujours strictement positive.
11. On a clairement $\frac{d(N(t),\mathcal{Q})}{d(N(t),\mathcal{D})} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ qui est constant.
12. (a) On a $e^{it} + e^{i(t+\frac{2\pi}{3})} + e^{i(t-\frac{2\pi}{3})} = e^{it}(1 + e^{\frac{2i\pi}{3}} + e^{-\frac{2i\pi}{3}})$.
    Or $e^{-\frac{2i\pi}{3}} = e^{\frac{4i\pi}{3}}$. Si on note comme d'habitude, $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ alors l'expression à calculer devient

$$e^{it}(1 + j + j^2) = 0$$

    (b) Pour calculer des coordonnées de cet isobarycentre, il suffit de sommer coordonnée par coordonnée puis de diviser par 3. On note $G : \begin{pmatrix}x_G\\y_G\\z_G\end{pmatrix}$ cet isobarycentre. Alors

$$x_G = \frac{\cos t + \cos(t + \frac{2\pi}{3}) + \cos(t - \frac{2\pi}{3})}{\sqrt{2}} = \frac{\mathrm{Re}(e^{it} + e^{i(t+\frac{2\pi}{3} + e^{i(t-\frac{2\pi}{3})})})}{\sqrt{2}} = 0$$

    On trouve de même $z_G = 0$. En considérant une partie imaginaire on obtient $y_G = 0$.
    Finalement l'isobarycentre de ces points est le point O.

    (c) Dans ce triangle, le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit sont confondus (les trois points sont sur le cercle de centre O et de rayon 1 dans $\mathcal{P}$). Ainsi ce triangle est équilatéral.