Exercice 1

Partie I

1. On a $\lambda I_2 - A = \begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 \\ -1 & \lambda-2 \end{pmatrix}$, ainsi $\det(\lambda I_2 - A) = (\lambda-2)^2 - 1 = (\lambda-3)(\lambda-1) = \lambda^2 - 4\lambda + 3$.
2. D'après le calcul précédent, $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$.
3. La matrice de ce système est $I_2 - 1 \times A$ et d'après les deux questions précédentes, $\det(I_2 - A) = 0$ donc $I_2 - A$ n'est pas inversible, c'est à dire que le système homogène associé possède des solutions non nulles. Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Le système s'écrit donc $\begin{cases} -x-y=0 \\ -x-y=0 \end{cases}$.. L'ensemble des solutions est $\text{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix})$. Il s'agit de la droite d'équation $y = -x$.
4. Le même raisonnement (avec λ_2) prouve qu'il existe des solutions non nulles. L'ensemble des solutions est cette fois $\text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ qui est la droite d'équation $y = x$.

   Voir fin de spé : les ensembles trouvés doivent être orthogonaux car la matrice A est symétrique. C'est bien le cas ici.
5. On a $\det(P) = 2$ donc P est inversible. Pour inverser, on résout le système suivant d'inconnues x, y et pour $a, b \in \mathbb{R}$ fixés.
$$\begin{cases} x+y=a \\ -x+y=b \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{a-b}{2} \\ y = \frac{a+b}{2} \end{cases}$$
   Ainsi $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (rappel : il faut ordonner les inconnues ainsi que les coordonnées du second membre pour lire P^{-1}).
6. Un produit matriciel en 2 étapes donne $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Ainsi la matrice D est diagonale.
7. D'après le cours, $D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ car D est diagonale.
8. On a, par produit à gauche par P et à droite par P^{-1}, $A = PDP^{-1}$. Ainsi $A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PDI_2DP^{-1} = PD^2P^{-1}$.

   Supposons pour un $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ que $A^n = PD^nP^{-1}$. Alors $A^{n+1} = A^nA = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$ (même simplification).

   Finalement, par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ $A^n = PD^nP^{-1}$.
9. Encore une fois il s'agit juste de deux produits matriciels. Astuce : le facteur $\frac{1}{2}$ présent dans P^{-1} commute avec les matrices.

Partie II

1. On trouve immédiatement $a_1 = 5, b_1 = 4, a_2 = 14, b_2 = 13$.
2. L'initialisation est prouvée. Si pour un $n \in \mathbb{N}$ on a bien $a_n, b_n \in \mathbb{N}$ alors par somme et produit d'entiers naturels, $a_{n+1}, b_{n+1} \in \mathbb{N}$ et la propriété demandées est prouvée par récurrence.
3. On a $a_0 - b_0 = 1$. Supposons pour un $n \in \mathbb{N}$ que $a_n - b_n = 1$. Alors $a_{n+1} - b_{n+1} = 2a_n + b_n - a_n - 2b_n = a_n - b_n = 1$. Finalement, par récurrence, $(a_n - b_n)$ est constante et égale à 1.
4. Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. On a $a_n = 1 \times b_n + 1$. Or (b_n) est croissante ($b_{n+1} = b_n + \underbrace{(a_n + b_n)}_{\in\mathbb{N}}$) et $b_1 = 4$ donc $b_n > 1$.

   Ainsi $a_n + 1 \times b_n + 1$ est la division euclidienne de a_n par b_n. Le reste vaut 1, ainsi que le quotient.

   On en déduit que pour $n \geqslant 1$, $\text{pgcd}(a_n, b_n) = 1$ (le prochain reste dans l'algorithme d'Euclide est nul, 1 divise tout entier). Ce résultat reste vrai pour $n = 0$ car $\text{pgcd}(2, 1) = 1$.
5. Remarquons que $2a_n$ et $2b_n$ sont des entiers pairs. Donc a_{n+1} est de la parité de b_n et b_{n+1} est de la parité de a_n (ajouter un nombre pair ne change pas la parité). Comme a_0 est pair et b_0 est impair, une récurrence immédiate montre que a_n est pair ssi n est pair et b_n est impair ssi n est pair.
6. Classiquement, on obtient $X_{n+1} = AX_n$.
7. Faire la récurrence. il s'agit de la même que pour une suite géométrique (idée : $X_{n+1} = AX_n = AA^nX_0$).
8. On a donc $X_n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n+1 & 3^n-1 \\ 3^n-1 & 3^n+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^{n+1}+1 \\ 3^{n+1}-1 \end{pmatrix}$

Partie III

1. On a $a_{n+2} = 2a_{n+1} + b_{n+1}$. Or $b_{n+1} = a_n + 2b_n = a_n + 2(a_{n+1} - 2a_n) = 2a_{n+1} - 3a_n$. Finalement $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n$.
2. L'équation caractéristique de (a_n) est $r^2 = 4r - 3$ dont les solutions sont 1 et 3 (étrange...). Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n = \lambda + 3^n\mu$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ à déterminer.
   Or $a_0 = 2$ et $a_1 = 5$. Ainsi $\lambda + \mu = 2$ et $\lambda + 3\mu = 5$. Donc $\mu = \frac{3}{2}$ et $\lambda = \frac{1}{2}$.
   Finalement, $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}3^n = \frac{1+3^{n+1}}{2}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, 3^{n+1} est un nombre impair et positif, donc $3^{n+1} + 1$ est pair et positif donc $a_n \in \mathbb{N}$.
4. On sait que $1 = o_{+\infty}(3^{n+1})$ donc $a_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{3^{n+1}}{2}$.