Concours Blanc : analyse

Durée : 4H. Calculatrices interdites. **Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction et la propreté : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.**

Lisez l'énoncé attentivement et en entier **AVANT** de commencer chaque exercice.

Exercice 1

1. Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{x+1}{x(1-x)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{1-x}$ pour tout $x \in]0,1[$. Justifier l'unicité.
2. Résoudre l'équation (E_H) : $(x-x^2)y'(x) + (x+1)y(x) = 0$ sur $]0,1[$.
3. Trouver toutes les solutions sur $]0,1[$ de (E) : $(x-x^2)y'(x) + (x+1)y(x) = x-1$.
4. Parmi ces solutions, y en a-t-il qui peuvent être prolongée par continuité en 0 ? en 1 ?
5. Les fonctions obtenues à la question précédente sont-elles dérivables sur $[0,1]$? Solutions de (E) sur $[0,1]$?

Exercice 2

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$. On pose également $f : x \mapsto x - x^2$, définie sur $[0,1]$.

1. (a) Etudier f sur $[0,1]$. Vous préciserez le maximum de f en plus de sa monotonie (et du graphe, bien entendu).
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.
   (c) Quelle est la limite de (u_n) ?
   (d) Donner la nature de la série $\sum u_n^2$ et calculer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2$.
2. (a) Pour $n \geqslant 0$, simplifier $S_n = \sum_{k=0}^{n} \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right)$.
   (b) En déduire la nature de la série $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.
   (c) Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.
3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = nu_n$.
   (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} - w_n = u_n(1-(n+1)u_n)$.
   (b) Justifier que (w_n) converge vers un réel noté l.
   (c) Montrer que $l > 0$.
   (d) Donner un équivalent de u_n en fonction de l.
   (e) Montrer que la série $\sum (w_{n+1} - w_n)$ converge.
   (f) En déduire que $l = 1$. On pourra raisonner par l'absurde et calculer un équivalent de $w_{n+1} - w_n$.

Exercice 3

Les différentes parties de cet exercice ne sont pas indépendantes. Vous avez tout à fait le droit d'utiliser des résultats d'une partie précédente à tout moment.

Partie I : études préliminaires

1. On pose $x \in \mathbb{R}^+$ et on s'intéresse à la fonction $\varphi_x : \left\{ \begin{array}{rcl}]0, \frac{\pi}{2}] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (\sin(t))^x \end{array} \right.$.
   (a) Que dire de la fonction φ_0 ?
   (b) Montrer que φ_x est prolongeable par continuité en 0.
   (c) Montrer que la courbe du prolongement de $\varphi_{\frac{1}{2}}$ possède une tangente en 0 et préciser cette tangente.
   (d) Tracer la courbe représentative de $\varphi_{\frac{1}{2}}$ en précisant en plus la tangente en $\frac{\pi}{2}$.
2. La fonction cotangente est définie par cotan : $x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$.
   (a) Préciser le domaine de définition D de cotan et montrer que cette fonction est π-périodique.
   (b) Question subsidiaire : montrer que $x \mapsto x\,\text{cotan}(x)$ est prolongeable par continuité en 0 et préciser le prolongement.
   (c) Quelle est la classe de cotan sur D ? Donner également la dérivée.
   (d) Tracer la courbe représentative sur $[-\pi, \pi] \cap D$. Préciser une équation de la tangente au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$.
   (e) Montrer que $\frac{1}{\sin^2} = 1 + \text{cotan}^2$. Quelle formule trigonométrique que vous connaissez est similaire à cette identité ?

Partie II

On s'intéresse à une généralisation des intégrales de Wallis vues en cours.

Pour $x \in \mathbb{R}^+$ on pose $f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^x \mathrm{d}t$. D'après la partie précédente, cette intégrale existe bien.

On pose également pour ces $x \in \mathbb{R}^+$, $g(x) = (x+1)f(x)f(x+1)$

1. Calculer $f(0)$ et $f(1)$.
2. Montrer que f est décroissante.
3. Montrer que $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.
4. On a montré en cours que pour $x \geqslant 0$ on a $(x+2)f(x+2) = (x+1)f(x)$.
   Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $g(x+1) = g(x)$. Comment appelle-t-on cette propriété ?
5. Calculer $g(0)$ puis $g(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6. On étudie maintenant la fonction g sur $]0,1[$. Soit $x \in]0,1[$.
   (a) Montrer que $g(x+n) = g(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$?
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier l'inégalité $f(k+1) \leqslant f(x+k) \leqslant f(k)$ valable pour tout $k \in \mathbb{N}$ et montrer que
   $$\frac{\pi}{2}\frac{x+n+1}{n+2} \leqslant g(x) \leqslant \frac{\pi}{2}\frac{x+n+1}{n+1}$$
   (c) Calculer la valeur de $g(x)$.
7. Montrer que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} f(x+1)$. On pourra encore utiliser un encadrement de décroissance.
8. En déduire que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$

Partie III

Nous allons dans cette partie calculer l'intégrale dite de Gauss : $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-(t^2)}\mathrm{d}t$.

La fonction f évoquée est la fonction f de la partie précédente.

1. Montrer que pour tout $u > -1$ on a $\ln(1+u) \leqslant u$.
2. Interpréter graphiquement ce résultat.
3. Soit $x > 1$ et $t \in [0, x[$. Montrer que $\left(1 - \frac{t^2}{x^2}\right)^{x^2} \leqslant e^{-t^2} \leqslant \left(1 + \frac{t^2}{x^2}\right)^{-x^2}$
4. En effectuant le changement de variable $t = x\cos u$, montrer que $\int_0^x \left(1 - \frac{t^2}{x^2}\right)^{x^2} \mathrm{d}t = xf(2x^2+1)$.
5. On pose $I = \int_0^x \left(1 + \frac{t^2}{x^2}\right)^{-x^2} \mathrm{d}t$
   (a) Pour quel $u \in]0,\pi[$ a-t-on $\operatorname{cotan}(u) = 1$? Justifier l'unicité.
   (b) Effectuer le changement de variable $t = x\operatorname{cotan}(u)$ dans l'intégrale I.
   (c) En déduire que $\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t \leqslant I \leqslant xf(2x^2-2)$.
6. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
7. Calculer $\lim\limits_{y\to+\infty} \int_0^y e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$.