Concours Blanc : algèbre

Durée : 3H. Calculatrices interdites. **Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction et la propreté : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.**

Lisez l'énoncé attentivement et en entier **AVANT** de commencer chaque exercice.

Exercice 1

On se place dans l'espace usuel $E = \mathbb{R}^3$, munit d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, e_1, e_2, e_3)$ où $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Pour $U, V \in E$ on note $U \cdot V$ le produit scalaire de U et V.

On considère les ensembles F et G d'équations respectives dans $\mathcal{R}$:

$$x + z = 0, \ x + y + z - 3 = 0$$

Partie I

1. Montrer que F est un plan vectoriel de E.
2. Est-ce le cas pour G ?
3. On pose $e_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_3), \ e_2' = e_2$ et $e_3' = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_3)$.
   Montrer que (e_1', e_2') est une base orthonormale de F et que e_3' en est un vecteur normal. En déduire que $\mathcal{B}' = (e_1', e_2', e_3')$ est une base orthonormée de E.
4. La base $\mathcal{B}'$ est-elle directe ?
5. Démontrer que pour $X \in E$ on a $X = (X \cdot e_1')e_1' + (X \cdot e_2')e_2' + (X \cdot e_3')e_3'$.
6. On considère une application $f : E \to E$.
   (a) On suppose que f est linéaire et $F \subset \ker(f)$. Montrer qu'il existe $a \in E$ tel que $f(X) = (X \cdot e_3')a$ pour tout $X \in E$.
   (b) Réciproquement, on suppose qu'il existe un $a \in E$ tel que $f : X \mapsto (X \cdot e_3')a$. Montrer que f est un endomorphisme de E et que $F \subset \ker(f)$.
   (c) Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que $F = \ker(f)$. Donner dans ce cas le rang et l'image de f.

Partie II

On reprend les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ et la partie précédente. On pose les matrices

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on note $p \in \mathcal{L}(E)$ l'endomorphisme dont la matrice dans $\mathcal{B}'$ est M'. On pose également $q = Id_E - p$.

1. Calculer $(M')^2$. Qu'en déduire pour p ?
2. Calculer le noyau et l'image de p.
3. (a) Montrer que $\ker(q) = F$.
   (b) Trouver le vecteur, noté a dans la partie I, qui est associé à q.
4. Etude du lien entre p et q
   (a) Calculer q^2.
   (b) Montrer que $p \circ q = q \circ p = 0$ où 0 désigne l'application nulle.
   (c) On note $s = 2p - Id_E = p - q$. Calculer s^2.
5. Donner la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ ainsi que son inverse (en détaillant la méthode).
6. Soit M la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de l'endomorphisme p.
   (a) Justifier que $\text{rg}(M) = 2$.
   (b) Justifier sans calcul que $M^2 = M$.
   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$(M + I)^n = I + (2^n - 1)M$$
   (d) Exprimer M en fonction de M', P et P^{-1}. Calculer ensuite explicitement cette matrice.

Partie III

On peut traiter les questions suivantes sans connaître explicitement la matrice M de la partie précédente. On pose $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices du type $M_{a,b} = aM + bI$, où a et b sont des réels.

1. Montrer que $\mathcal{M}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel dont on donnera une base et la dimensions.
2. Montrer que dans les cas $b = 0$ ou $a + b = 0$ la matrice $M_{a,b}$ n'est pas inversible.
3. On fixe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Déterminer les réels e et f tels que $M_{a,b} \times M_{c,d} = M_{e,f}$.
4. Trouver les $M_{a,b}$ inversibles dont l'inverse est une matrice de $\mathcal{M}$. On précisera les conditions que doivent vérifier a, b.
5. Quelle conclusion en tirer ?

Exercice 2

Un livre prêt à être édité contient 4 erreurs numérotées de 1 à 4. Il est relu par n relecteurs qui décèle chaque erreur (indépendamment les unes des autres) avec une probabilité de $\frac{1}{3}$ (où n est un entier naturel non nul). Les relectures sont également indépendantes.

1. Avec quelle probabilité la première erreur n'est pas décelée au cours des n relectures ?
2. Quelle est la probabilité pour que le livre soit entièrement corrigé à la fin du processus ? On note p_n cette probabilité.
3. Donner une condition suffisante sur n pour que $p_n \geqslant \frac{9}{10}$.
4. On note X_n le nombre d'erreur corrigé au cours de la lecture. Donner la loi de X_n.
5. Calculer l'espérance et la variance de X_n ainsi que leurs limites quand $n \to +\infty$.
6. (a) Calculer la probabilité pour que la première erreur soit décelée exactement par le n-ième relecteur.
   (b) Soit $p \in]0, 1[$. Montrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} (1 - p)^{n-1} p$ converge et calculer sa somme. Donner une interprétation possible pour notre cas d'étude.

Exercice 3

Rappel : $\text{cotan} = \frac{\cos}{\sin}$ et $1 + \text{cotan}^2 = \frac{1}{\sin^2}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $P_n(X) = \frac{1}{2i}\left((X + i)^{2n+1} - (X - i)^{2n+1}\right)$ et $Q_n = \sum\limits_{p=0}^{n} \binom{2n+1}{2p+1} (-1)^p X^{n-p}$.

1. Exhiber P_1 et Q_1. On doit pouvoir lire leurs coefficients...
2. Vérifier que $P_n(X) = Q_n(X^2)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Vérifier que $\text{cotan}(\frac{k\pi}{2n+1})$ est racine de P pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. En déduire n racines distinctes de Q.
4. Calculer $\frac{\binom{2n+1}{3}}{\binom{2n+1}{1}}$ pour $n \geqslant 1$.
5. Déduire des deux question précédentes que $\sum\limits_{k=1}^{n} \text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3}$.
6. Montrer que $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[\ \sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x)$.
7. Représenter l'inégalité précédente sur le cercle trigonométrique.
8. Soit $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Montrer que $\text{cotan}^2(\theta) \leqslant \frac{1}{\theta^2} \leqslant 1 + \text{cotan}^2(\theta)$.
9. Montrer que $\frac{n(2n-1)}{3} \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(2n+1)^2}{k^2\pi^2} \leqslant \frac{2n(n+1)}{3}$.
10. En déduire $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ (la convergence de cette série étant déjà traitée en cours).