Dans tout ce cours, I désigne un intervalle non vide et non réduit à un point et $\mathbb{K}$ est l'un des ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Généralités sur les fonctions

Les définitions de base

Soit $f : E \to F$ une fonction avec $E \subset \mathbb{R}$. Il faut savoir retrouver les formules quantifiées ou les méthodes pour prouver :

1. f est croissante, décroissante.
2. f est paire, impaire (condition sur E ?)
3. f est T-périodique (condition sur T ? sur E ?)

Contre-exemples

Donner au moins un exemple de fonction ni croissante ni décroissante, un exemple de fonction ni paire ni impaire.

Image, image réciproque

Définition

Soit $f : E \to F$ une application. L'image de f est l'ensemble $f(E) = \{y \in F |\ \exists x \in E\ y = f(x)\}$

Ensemble d'arrivé

En général, $f(E) \neq F$ (donner des exemples). Quel est le nom de la propriété $f(E) = F$?

Définition

Soit $f : E \to F$ une application et $B \subset F$. L'image réciproque de B par f est l'ensemble $f^{-1}(B) = \{x \in E |\ f(x) \in B\}$. C'est l'**ensemble** des antécédents des éléments de B.

Exemples

Calculer $\exp^{-1}([0, 1[)$.

PIEGE

La notation est la même que pour la bijection réciproque, mais on ne manipule pas ici des éléments de F, mais des parties de F

II Fonctions continues

II.1 Continuité en un point

II.1.1 Définition

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction, $a \in I$ et $\ell \in \mathbb{K}$. On dit que f admet ℓ comme limite en a ssi

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha > 0 \forall x \in I\ |x - a| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

En d'autres termes, pour tout voisinage V_ℓ de ℓ il existe un voisinage V_a de a tel que $f(I \cap V_a) \subset V_\ell$.

Dans le cas où ℓ existe, elle est unique et vaut $f(a)$. On dit alors que f est continue en a.

II.1.2 Exemple

Donner un exemple de fonction non continue en 0.

II.1.3 Proposition

La continuité en un point est conservée par somme, différence, produit, composition et inverse (dans le cas où la valeur que prend la fonction est non nulle).

II.1.4 Prouver l'existence d'une limite

1. Par opérations, y compris équivalent ou DL dans le cas d'une forme indéterminée.
2. Théorème d'encadrement (et pas le théorème de passage à la limite des inégalités larges....)
3. Limite monotone (une fonction monotone admet des limites à droite et à gauche en tout point de l'intervalle de définition)

II.1.5 Les formes indéterminées

Citer toutes les formes de limites qui sont indéterminées.

II.1.6 Proposition
Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$, $l \in \overline{\mathbb{R}}$. *Soit* $(u_n) \in I^{\mathbb{N}}$ *telle que* $u_n \underset{+\infty}{\to} a$.

Si f *admet* l *pour limite en* a *alors la suite* $(f(u_n))$ *admet* l *pour limite en* $+\infty$.

II.1.7 Remarque

Ce résultat est très pratique pour prouver qu'une limite n'existe pas. Montrer que sin n'as pas de limite en $+\infty$.

II.2 Continuité sur un intervalle

II.2.1 Proposition

- $\mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel, stable par multiplication.*
- *La composée de deux fonctions continues est encore continue.*

II.2.2 Définition-Proposition
Soit $f \in \mathcal{C}(I \backslash \{a\}, \mathbb{K})$ *qui vérifie en plus* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbb{K}$. *On appelle prolongement par continuité de* f *à l'intervalle* I *la fonction* $\widetilde{f} : I \to \mathbb{K}$ *telle que* $\widetilde{f}_{I\backslash\{a\}} = f$ *et* $\widetilde{f}(a) = \ell$. $\widetilde{f}$ *est continue sur* I

II.2.3 Exemple
Prolonger la fonction $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$.

II.3 Propriétés globales

II.3.1 Théorème (Valeurs intermédiaires)
Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. *Soient* $a, b \in I$. *Si* $f(a)f(b) \leqslant 0$ *alors il existe* $c \in [a, b]$ *tel que* $f(c) = 0$

II.3.2 Conséquences

On déduit aisément du théorème précédent que $f(I)$ est un intervalle, on peut donc déduire $f(I)$ d'un éventuel tableau de variations.

II.3.3 Application classique

On utilise classiquement le théorème des valeurs intermédiaires pour prouver l'**existence** (et surtout pas l'unicité...) d'une solution à une équation du type $f(x) = \alpha$ d'inconnue x.

II.3.4 Théorème
Soient $a < b \in \mathbb{R}$ *et* $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. *Alors* f *est bornée et atteint ses bornes (son ensemble image possède un minimum et un maximum).*

De manière équivalente, l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

II.3.5 Théorème
Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. *On pose* $J = f(I)$. *C'est un intervalle.*

f *est strictement monotone ssi* f *est bijective de* I *dans* J.

Dans ce cas, f^{-1} *est continue sur* J *et strictement monotone de même sens de variations que* f.

Vocabulaire Dans le cas où f est bijective, on dit que f est un homéomorphisme de I sur J

III Fonctions dérivables

III.1 Dérivabilité

Rappels

Soit $a \in I$. f est dérivable en a signifie que la courbe de f possède une tangente en a.

Une fonction à valeurs complexes est dérivable ssi ses parties réelle et imaginaire le sont.

III.1.1 Les fonctions usuelles non dérivables

Dresser la liste des fonctions que vous connaissez et qui ne sont pas dérivables sur leur ensemble de définition.

III.1.2 Proposition
f est dérivable en a ssi f possède un DL à l'ordre 1 en a ssi $f(x) = f(a) + \alpha(x - a) + o_a(x - a)$ (et $\alpha = f'(a)$).

III.1.3 Attention

On ne peut pas étendre ce résultat à un DL d'ordre 2 et l'existence de $f''(a)$. Le prolongement par continuité de $x \mapsto x^3 \sin(\frac{1}{x})$ est un contre exemple.

III.1.4 Proposition
- *$\mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ est un espace vectoriel, stable par multiplication.*
- *L'inverse d'une fonction dérivable qui ne s'annule pas est encore dérivable.*
- *La composée de deux fonctions dérivables est encore dérivable.*

III.1.5 Théorème (Bijection réciproque)
Soit $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ bijective de I sur $f(I)$ et telle que f' ne s'annule pas sur I. Alors f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

III.1.6 Exemple
Retrouver les dérivées de $\arctan, \arcsin$.

III.2 Accroissements finis

III.2.1 Théorème (Théorème de Rolle)
Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

III.2.2 Théorème (Théorème des accroissements finis)
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Conséquences

1. Une fonction de dérivée nulle **sur un intervalle** est constante.
2. Une fonction de dérivée positive (resp. négative) est croissante (resp. décroissante).
3. f (dérivable sur I) est strictement croissante ssi $f' \geqslant 0$ et l'ensemble $(f')^{-1}(\{0\}) = \{x \in I |\ f'(x) = 0\}$ (points d'annulation de f') ne contient pas d'intervalle non vide et non réduit à un point (on dit que cet ensemble est d'intérieur vide).

III.2.3 Théorème (Inégalité des accroissements finis)
Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ dérivable sur $]a, b[$.
1. *S'il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in]a, b[\ m \leqslant f'(x) \leqslant M$ alors $m(b - a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b - a)$.*
2. *Si $|f'|$ est majorée sur $[a, b]$ par $K \in \mathbb{R}^+$ alors $|f(b) - f(a)| \leqslant K|b - a|$.*

III.2.4 Pour appliquer

En pratique, il faut choisir a, b puis ensuite **calculer** m et M (ou K).

III.2.5 Théorème
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ *une fonction dérivable et* $M \in \mathbb{R}^+$ *tel que* $\forall x \in [a, b]\ |f'(x)| \leqslant M$.
Alors $|f(b) - f(a)| \leqslant M|b - a|$.

III.2.6 Remarque

L'égalité des accroissements finis est fausse dans le cas où l'ensemble d'arrivé n'est pas (inclus dans) $\mathbb{R}$. L'exponentielle complexe fournit un bon contre exemple.

III.2.7 Théorème (Prolongement $\mathcal{C}^1$)
Soit f *une fonction continue sur* $[a, b]$ *et de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $]a, b]$.
Si $\lim\limits_a f'$ *existe et est finie alors* f *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[a, b]$.

III.2.8 Remarques

1. La conclusion est donc la dérivabilité de f en a et la continuité de f' en a.
2. On ne peut pas se passer de l'hypothèse de continuité en a pour f (qui sera souvent un prolongement par continuité).
3. Si la limite existe et est infinie, la courbe de f possède une tangente verticale en a.

IV Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

IV.1 Généralités

IV.1.1 Attention

Il ne faut pas confondre dérivable sur I et de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Le prolongement de $x \mapsto x^2 \sin(\frac{1}{x})$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais pas de classe $\mathcal{C}^1$.

De manière générale, $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{K}) \subset \mathcal{D}^k(I, \mathbb{K})$ et les deux ensembles sont distincts.

IV.1.2 Prouver la classe $\mathcal{C}^k$

Les théorèmes III.1.4 et III.1.5 s'étendent au cas $\mathcal{C}^k$

IV.1.3 Prolongement $\mathcal{C}^k$

On peut appliquer k-fois le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$ pour étudier la classe d'une prolongement. Il s'agit de dériver successivement puis étudier la limite des dérivées.

IV.1.4 Proposition (Leibniz)
Si $f, g \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{K})$ *alors* fg *est encore de classe* $\mathcal{C}^k$ *et* $(fg)^{(k)} = \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k-i)}$.

IV.2 Taylor-Young

IV.2.1 Proposition (Primitivation des développements limités)
Soient $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}), a \in I, n \in \mathbb{N}$. *Si* f' *possède un DL en* a *à l'ordre* n *ie.* $f'(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x - a)^k + o_a((x - a)^n)$ *alors* f *admet un DL en* a *à l'ordre* $n + 1$ *et*

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k + 1}(x - a)^{k+1} + o_a((x - a)^{n+1}).$$

IV.2.2 Traduction

On peut toujours intégrer terme à terme un développement limité (y compris le o_a, ce qui revient à augmenter la puissance de 1).

IV.2.3 Ordre d'un DL

L'ordre d'un développement est donné par la puissance dans le o, et pas par le degré de la partie régulière (la partie polynomiale).

IV.2.4 Théorème (Formule de Taylor-Youg)
Soient $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ *et* $a \in I$. *Alors* f *possède un développement limité à l'ordre* n *au voisinage de* a *donné par* $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k + o_a((x - a)^n)$.

IV.2.5 Exemple
Redonner les développements en 0 de $\exp, \ln, \sin, \cos, \frac{1}{1+x}, (1+x)^\alpha, \tan$.

En utilisant la proposition IV.2.1, retrouver les DL de $\arctan, \arccos$.

IV.2.6 Conséquence

Une conséquence du théorème de Taylor-Young est : si f est de classe $\mathcal{C}^n$, alors on peut obtenir le DL de f' à l'ordre $n-1$ par dérivation terme à terme.

ATTENTION : contrairement à l'intégration, on a besoin ici de l'hypothèse de classe $\mathcal{C}^n$ où n est l'ordre du DL de f.

IV.3 Taylor-Lagrange

IV.3.1 Théorème (Formule de Taylor avec reste intégral)
Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$, $a, x \in I$. Alors

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^b \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

IV.3.2 Remarques

— Ecrire cette formule dans le cas $n = 1$.

— La preuve se fait en effectuant des intégrations par parties successives sur le cas $n = 1$. Comment la formaliser proprement ?

IV.3.3 Exercice
Transformer le reste intégral en une intégrale entre 0 et 1 par changement de variable affine.

IV.3.4 Corollaire (Inégalité de Taylor-Lagrange)
Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$ et $a, x \in I$. Alors

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \leqslant \sup_{[a,x]} |f^{(n+1)}| \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

IV.3.5 Question

Pourquoi $\sup\limits_{[a,x]} |f^{(n+1)}|$ est-elle réelle (finie) ?

IV.3.6 Exemple
Montrer que $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ converge vers e.

(*) Calculer la somme et le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$.