Devoir maison n°1

A rendre le 12/09

Exercice 1
Soit f la fonction $\left\{\begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x) - x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \end{array}\right.$.

Partie I

1. Montrer que $f \in \mathcal{C}^\infty(]0,+\infty[,\mathbb{R})$ puis donner les variations de f'.
2. Dresser le tableau de variations de f faisant apparaître les limites en 0 et $+\infty$. On pourra calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f'$ au passage.
3. Vérifier que $f(2) < 0 < f(3)$ et tracer l'allure de la courbe représentative de f.
4. Faire tracer à python cette même courbe pour valider vos résultats. On prendra comme intervalle de dessin $[0.1; 10]$

Partie II

On établit ici une inégalité utile pour la suite.

1. Montrer que f est une bijection. On note $g = f^{-1}$.
2. Tracer le graphe de g. Que peut-on dire de $g(0)$?
3. On pose $\varphi : x \mapsto g(\ln(x))$.
   Montrer que pour tout $x > 0$ on a $0 \leqslant x\ln(1+\frac{1}{x}) \leqslant 1$ puis que $f(x) \leqslant \ln(x) \leqslant f(ex)$ où $e = e^1$.
4. En déduire que l'on a $x \leqslant \varphi(x) \leqslant ex$ pour tout $x > 0$.
5. Donner un majorant entier naturel de $\varphi(10)$.
6. Montrer que $\forall x > 0\ x^{x+1} > 10(x+1)^x \iff x > \varphi(10)$. On pourra changer l'expression de $f(x)$ et factoriser.

Partie III (*)

On se pose le problème de savoir, pour $p, q \in \mathbb{N}$ supérieurs à 2, à quelle condition p^q et q^p ont le même nombres de chiffres dans leurs représentations décimales.

On suppose donc dans cette partie que $p, q \in \mathbb{N}$, $p, q \geqslant 2$ et p^q et q^p ont le même nombre de chiffre dans leurs représentations décimales.

1. Soit $\alpha > e$. On pose $f_\alpha : \left\{\begin{array}{ccc} [\alpha,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \alpha^x x^{-\alpha} \end{array}\right.$.
   Etudier les variations de cette fonction en précisant la limite en $+\infty$.
2. On suppose ici que $p, q \geqslant 28$. Et on veut montrer que $p = q$. On suppose au contraire que $p > q$.
   (a) Montrer que $f_q(p) \geqslant f_q(q+1)$.
   (b) En déduire que $f_q(p) > 10$. On pourra utiliser la partie II (comme annoncé au début de celle-ci...).
   (c) Trouver une contradiction et conclure.
3. Ecrire un script python qui permet de trouver tous les $p \neq q \in [\![2,27]\!]$ tels que p^q et q^p ont le même nombres de chiffres dans leurs représentations décimales.

Exercice 2 (Théorème de Darboux)
Soit $f \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ (où I est comme d'habitude un intervalle non vide et non réduit à un point). Soient $a, b \in I$ tels que $a < b$, et y entre $f'(a)$ et $f'(b)$.

On souhaite montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f'(c) = y$, c'est à dire que f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.

1. On définit deux applications $\varphi : \left\{\begin{array}{ccc} [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} f'(a) & \text{si } x = a \\ \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{sinon} \end{cases} \end{array}\right.$ et $\psi : \left\{\begin{array}{ccc} [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} f'(b) & \text{si } x = b \\ \frac{f(x)-f(b)}{x-b} & \text{sinon} \end{cases} \end{array}\right.$.
   Montrer que $\varphi, \psi \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.
2. Montrer que y est entre $f'(a)$ et $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ou entre $f'(b)$ et $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
3. Conclure.

On vient ainsi d'exhiber des fonctions qui vérifie la propriété des valeurs intermédiaires sans être continues (prendre dans le cours un exemple de fonction dérivable non $\mathcal{C}^1$). Ainsi le TVI n'est en aucun cas une équivalence.