Table des matières

Dans tout ce cours, I désigne un intervalle non vide et non réduit à un point.

I Fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$

En pratique, $n = 2$ ou 3, mais cette distinction n'est pas vraiment nécessaire dans ce qui va suivre.

I.1 Norme, distance

I.1.1 Rappel

Si $X, Y \in \mathbb{R}^n$, sont de coordonnées $(x_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ et $(y_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$, alors le produit scalaire (canonique) de X et Y (noté $< X, Y >$ ou $(X|Y)$) est

$$< X, Y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

La norme de X est donnée par $\|X\| = \sqrt{< X, X >}$ et la distance de X à Y est $\|X - Y\|$. On note cette dernière $d(X, Y)$.

I.1.2 Théorème (Inégalité de Cauchy-Schwarz)
Soient $X, Y \in \mathbb{R}^n$. On a $| < X, Y > | \leqslant \|X\|\|Y\|$

I.1.3 Proposition
1. *Le produit scalaire est symétrique ($< X, Y >=< Y, X >$), bilinéaire, positif ($< X, X >\geqslant 0$)*
2. *La norme vérifie :*
   - $\|X\| = 0 \iff X = 0$
   - $\forall\lambda \in \mathbb{R}\ \|\lambda X\| = |\lambda|\|X\|$
   - $\|X + Y\| \leqslant \|X\| + \|Y\|$
   - $|\|X\| - \|Y\|| \leqslant \|X \pm Y\|$
   - *Pour* $(\lambda_i) \in \mathbb{R}^p$ *et* $(X_i) \in (\mathbb{R}^n)^p$ $\left\|\sum_{i=1}^{p} \alpha_i X_i\right\| \leqslant \sum_{i=1}^{p} |\alpha_i|\|X_i\|$

   Les trois dernières propriétés sont appelées inégalité triangulaire, et conséquences du théorème I.1.2

I.2 Continuité, dérivabilité

I.2.1 Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$ une fonction, $a \in I$ et $b \in \mathbb{R}^n$. On dit que f admet b comme limite en a (notations habituelles) ssi

$$\forall\varepsilon > 0\exists\alpha > 0\forall t \in I\ |t - a| \leqslant \alpha \Rightarrow \|f(t) - b\| \leqslant \varepsilon$$

Dans le cas où b existe, elle est unique et vaut $f(a)$. On dit alors que f est continue en a.

f est dite continue sur I si elle est continue en tout point a de I.

I.2.2 Proposition
Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$, $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$ *(les* ***fonctions*** $f_1, \ldots, f_n$ *sont appelées applications coordonnées). Soit* $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ *et* $a \in I$.

$$\lim_{t \to a} f(t) = b \iff \forall i \in [\![1, n]\!] \ \lim_{t \to a} f_i(t) = b_i$$

Preuve.
Pour $t \in I$ et $i \in [\![1, n]\!]$, on a $|f_i(t) - b_i| \leqslant \|f(t) - b\|$ (avec égalité ssi toutes les autres coordonnées de $f(t) - b$ sont nulles). Or $f(t) \underset{t \to a}{\to} b \iff \|f(t) - b\| \underset{t \to a}{\to} 0$.

Ainsi SI $f(t) \underset{t \to a}{\to} b$ ALORS $f_i(t) \underset{t \to a}{\to} b_i$.

Réciproquement, observons que $\|f(t) - b\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (f_i(t) - b_i)^2}$. Par compositions, somme puis composition (trouver les fonctions), si tous les $f_i(t) - b_i$ tendent vers 0 alors $\|f(t) - b\| \underset{t \to a}{\to} 0$. ∎

I.2.3 Remarque

On retrouve le fait (connu) que la continuité des fonctions à valeurs complexes est équivalente à celles des parties réelle et imaginaire. De manière plus générale, f est continue ssi toutes ses applications coordonnées sont continues.

I.2.4 Dérivabilité

La définition de la dérivabilité (tout court, à gauche ou à droite) est mot pour mot la même que pour des fonctions à valeurs réelles. Seule change la définition du symbole lim utilisé. Remarquons que les quotients du type $\frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ sont bien définis car $\frac{1}{t-a}$ est un réel (ce quotient est bien définit dès que f est à valeurs dans un $\mathbb{R} - ev$: on doit pouvoir faire des produits par des réels et une soustraction sur les valeurs de f).

Quand f est dérivable sur I, la fonction dérivée f' est à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

I.2.5 Cinématique

Si la fonction f étudiée représente les coordonnées d'un mobile au cours du temps, alors f' est le vecteur vitesse du mouvement.

I.2.6 Proposition
$f : I \to \mathbb{R}^n$ *est dérivable (en un point ou sur* I*) ssi ses fonctions coordonnées* $f_1, \ldots, f_n$ *le sont et on a alors* $f' = \begin{pmatrix} f_1' \\ \vdots \\ f_n' \end{pmatrix}$. f *est alors continue.*

I.2.7 Exemple
$t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Reconnaître la fonction à valeurs complexes associée.

I.2.8 Proposition
L'application $D : f \mapsto f'$ *est linéaire de* $\mathcal{D}(I, \mathbb{R}^n)$ *dans* $(\mathbb{R}^n)^I$ *ie pour* $f, g : I \to \mathbb{R}^n$ *dérivables et* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$.

Preuve.
Le vérifier sur chaque coordonnée. ∎

I.2.9 Proposition
Soient $f, g \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}^n)$ *et* $u \in \mathcal{D}(I, R), v \in \mathcal{D}(J, I)$ *(*v *est à valeurs dans* I*).*

1. $u \times f$ *est dérivable et* $(uf)' = u'f + uf'$.
2. *Si* u *ne s'annule pas* $\frac{1}{u}f$ *est dérivable et* $\left(\frac{1}{u}f\right)' = \frac{1}{u^2}(uf' - u'f)$
3. $f \circ v$ *est dérivable sur* J *et* $(f \circ v)' = v' \times f' \circ v$
4. $< f, g >$ *est dérivable et* $(< f, g >)' = < f', g > + < f, g' >$
5. *(cas* $n = 3$*)* $f \wedge g$ *est dérivable et* $(f \wedge g)' = f' \wedge g + f \wedge g'$.
6. *(cas* $n = 2$*)* $\det(f, g)$ *est dérivable et* $(\det(f, g))' = \det(f', g) + \det(f, g')$.

I.2.10 Exemple
Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$ dérivable. Etudier la dérivabilité et la dérivée de $\|f\|$.

I.3 Taylor-Young

I.4 Dérivées d'ordre supérieur

On peut étendre de manière similaire (en reprenant les même définitions, puis on constate qu'il suffit de vérifier la propriété sur les fonctions coordonnées) les notions de dérivées d'ordre k, de classe $\mathcal{C}^k$ pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

I.4.1 Combinaison linéaire, produit

Les formules de dérivée k-ième usuelles s'appliquent encore (avec les même preuve) dans le cas d'une combinaison de fonctions $\mathcal{D}^k(I, \mathbb{R}^n)$ et dans le cas du produit uf où $u \in \mathcal{D}^k(I, \mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{D}^k(I, \mathbb{R}^n)$ (l'idée est qu'il faut s'assurer que les opérations en jeu possèdent un sens : pas de produit de vecteur, on ne somme pas un nombre et un vecteur...)

I.4.2 $o_a(1)$

Dans la suite du chapitre, la notation $o_a(1)$ représente une fonction (à valeurs dans $\mathbb{R}^n$) dont la limite en a est $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Il s'agit donc d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ dont toutes les coordonnées sont des $o_a(1)$ (celui que l'on connaissait). Plus généralement si g est à valeurs réelles, $o_a(g)$ sera une fonction vectorielle dont toutes les coordonnées sont des $o_a(g)$ au sens habituel.

I.4.3 Théorème (Taylor-Young)
Soit $f \in \mathcal{C}^p(I, \mathbb{R}^n)$ et $a \in I$ Alors

$$f(t) = f(a) + (t-a)\underbrace{f'(a)}_{vitesse} + \frac{(t-a)^2}{2!}\underbrace{f''(a)}_{accélération} + \cdots + \frac{(t-a)^p}{p!}f^{(p)}(a) + (t-a)^p o_a(1)$$

II Etude de courbes

II.1 Courbes dans $\mathbb{R}^2$

II.1.1 Définition
Une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$ dans $\mathbb{R}^2$ est une fonction $f : \begin{cases} I & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & M(t) \end{cases}$. Le ***support*** *de la courbe est $f(I)$ (l'ensemble des points $M(t)$, ou encore la trajectoire du point M) .*

II.1.2 Exemple
Quel est le support de la courbe $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ définie sur $[-\pi, \pi]$? Remarquer que la variable t n'apparaît pas graphiquement.

On note souvent $M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$. Le but n'est pas de tracer la courbe représentative des fonctions x et y mais bien la trajectoire du mobile dont on connaît les coordonnées en fonction du temps.

II.1.3 Définition
Soit f une courbe $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^2)$ et $t_0 \in I$. Si $f'(t_0) \neq \vec{0}$, on dit que le point t_0 est régulier, sinon on dit qu'il est singulier. Si tous les points de f sont régulier, f est dite régulière.

II.1.4 Courbes représentatives

Soit $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^1$ (numérique). On considère la courbe $f : t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \varphi(t) \end{pmatrix}$.

Le support de f est alors $\{\begin{pmatrix} t \\ \varphi(t) \end{pmatrix} \mid t \in I\}$, c'est à dire la courbe représentative de la fonction φ ! De plus, f est régulière.

Question subsidiaire : que dire de la courbe paramétrée $g : t \mapsto \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ t \end{pmatrix}$?

II.2 Domaine d'étude

Très souvent, il faudra calculer I. Tout comme pour les fonctions numériques paires, impaires ou périodiques, on peut parfois réduire l'étude à un intervalle plus petit. Ceci correspond à une certaine symétrie du support de la courbe.

II.2.1 Méthode générale

Il s'agit d'observer les coordonnées de $M(\varphi(t))$ où $\varphi : t \mapsto -t$ ou $t+T$ ou $t_0 - t$ ou $\frac{1}{t}$... Si les coordonnées obtenues correspondent à une transformation géométrique connue, on réduit l'intervalle d'étude, et on appliquera la transformation au morceau de support déjà tracé.

II.2.2 Exemple

1. Réduire le domaine de $t \mapsto \begin{pmatrix} \ln(t) \\ \frac{2t}{t^2+1} \end{pmatrix}$
2. $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$. Attention à la traduction de la périodicité.

II.2.3 $t_0 - t$

Sur un intervalle du type $[0, t_0]$ on peut toujours essayer de changer t en $t_0 - t$ pour se ramener à une étude sur $[0, \frac{t_0}{2}]$.

Plus généralement, donner la transformation affine correspondante pour l'intervalle $[a, b]$.

II.3 Tangentes, variations

Maintenant que nous disposons d'un domaine d'étude raisonnable, il nous faut tracer l'allure du support. Pour cela nous allons déterminer si la courbe se "dirige" vers la gauche ou la droite (x est décroissante ou croissante), vers le haut ou le bas (variations de y).

II.3.1 Etude des variations

Il s'agit là simplement de donner un tableau de variations complet pour x et y, tout en notant les points d'annulation des dérivées (on repère ainsi les éventuels points singuliers).

II.3.2 Cordes

La corde passant par les points (distincts) $M(t)$ et $M(a)$ est dirigée par le vecteur unitaire $\frac{\overrightarrow{M(a)M(t)}}{\|\overrightarrow{M(a)M(t)}\|}$

II.3.3 Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée et $t_0 \in I$. On dit que f possède une demi tangente à gauche (resp. à droite) en t_0 ssi $\lim_{t \to a^-} \frac{f(t)-f(t_0)}{\|f(t)-f(t_0)\|}$ existe (resp. limite à droite). Notons $\vec{u}_-$ et $\vec{u}_+$ ces limites quand elles existent.

La demi-tangente à gauche de f en a est alors $f(a) + \mathrm{Vect}(\vec{u}_-)$ et la demi-tangente à droite est $f(a) + \mathbb{R}\vec{u}_+$. Si ces droites sont confondues ($\vec{u}_-$ et $\vec{u}_+$ sont colinéaires) alors la droite obtenue est la tangente à f en a.

II.3.4 Théorème

Si t_0 est un point régulier de la courbe f alors f possède une tangente en t_0 dirigée par $f'(a)$.

Preuve.

D'après le théorème de Taylor-Young, et par continuité de la norme, $\|f(t) - f(t_0)\| \underset{t_0}{\sim} |t - t_0| \|f'(t_0)\| \neq 0$. Ainsi $\frac{f(t)-f(t_0)}{\|f(t)-f(t_0)\|} \underset{t_0}{\sim} \frac{1}{\|f'(t_0)\|} \frac{f(t)-f(t_0)}{|t-t_0|} \underset{t_0}{\to} \pm \frac{f'(t_0)}{\|f'(t_0)\|}$. ∎

II.3.5 Exemple

Remarquer les tangentes horizontales et verticales de $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$.

II.4 Points singuliers

II.4.1 Continuer à dériver

Le raisonnement précédent s'étend sans difficulté cas le cas où $f'(t_0) = 0$ mais $f^{(p)}(t_0) \neq 0$ pour un $p > 1$ (que l'on prend le plus petit possible). Allons plus loin et trouvons de plus $q > p$ le plus petit entier tel que $\vec{u}_p = f^{(p)}(t_0), \vec{u}_q = f^{(q)}(t_0)$ est libre.

Alors dans le repère $(M(t_0), \vec{u}_p, \vec{u}_q)$, les coordonnées de $M(t)$ (notées $\alpha(t)$ et $\beta(t)$) vérifient

$$\begin{cases} \alpha(t) = \frac{(t-t_0)^p}{p!} + o_{t_0}((t-t_0)^p) \\ \beta(t) = \frac{(t-t_0)^q}{q!} + o_{t_0}((t-t_0)^q) \end{cases}$$

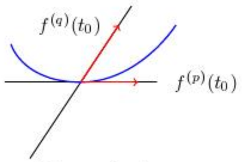
c'est à dire que la courbe "suit" les directions d'abord de sa tangente (de direction $\vec{u}_p$) puis de $\vec{u}_q$.

II.4.2 Cas p=1, q=2

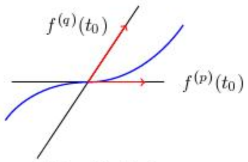
La vitesse et l'accélération ne sont pas colinéaires. C'est le cas le plus classique. Le point est dit **birégulier**. Dans ce cas la vitesse donne la direction de la tangente et l'accélération le sens de "courbure".

II.4.3 Cas général

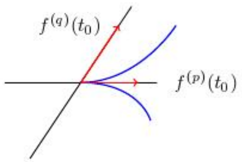
Suivant la parité de p et q on obtient les 4 cas suivants.



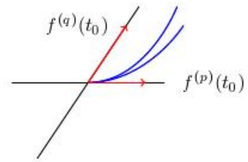
Point ordinaire



Point d'inflexion



Rebroussement 1ère espèce



Rebroussement 2ème espèce

II.4.4 En pratique

On peut tout à fait utiliser un développement limité de x et y pour obtenir des vecteurs proportionnels aux dérivées successives.

II.4.5 Exemple
Etudier la tangente au point de paramètre 0 de $t \mapsto \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(t) \\ t^3 \end{pmatrix}$

Trouver en fonction de $k \in \mathbb{R}$ les éventuels points singuliers de $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) + 2k\cos(\frac{t}{2}) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$

II.5 Branches infinies

II.5.1 Définition
Soit $f : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée et $a \in \bar{I}$. On dit que f possède une branche infinie au voisinage de a si x et y admettent une limite en a et qu'on est dans un des cas suivant

1. *Une des limite est infinie et l'autre finie : on obtient une asymptote horizontale ou verticale.*
2. *ces deux limites sont infinies.*
   (a) *Si $\lim\limits_{a} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$ alors on dit que f possède une branche infinie de direction (Ox).*
   (b) *Si $\lim\limits_{a} \frac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$ alors on dit que f possède une branche infinie de direction (Oy).*
   (c) *Si $\lim\limits_{a} \frac{y(t)}{x(t)} = \alpha \in \mathbb{R}^*$ il y a deux cas*
      i. *si $\lim\limits_{t\to a} y(t) - \alpha x(t) = \beta \in \mathbb{R}$ alors on dit que la droite $\mathcal{D} : y = \alpha x + \beta$ est asymptote à f.*
      ii. *sinon on dit que f admet une branche infinie de pente m.*

II.5.2 Exemple
Etudier les branches infinies de $x(t) = \frac{t^2}{t-1}, y(t) = \frac{t}{t^2-1}$.

II.6 Plan d'une étude

On pose $f : I \to R^2$ et on note x et y ses fonctions coordonnées.

1. Souvent, l'intervalle de définition de f ne sera pas donné. il faut alors commencer l'étude par déterminer le domaine de définition de la courbe.
2. Définir ensuite un domaine d'étude le plus restreint possible en utilisant les symétries des expressions pour x et y.
3. Déterminer les variations et les limites de x et y, et on résume ces informations dans un tableau de variations.
4. Exhiber les tangentes "intéressantes" ainsi que les points singuliers s'il y en a.
5. Etudier les branches infinies éventuelles.
6. Tracer la courbe en utilisant toutes les informations précédemment glanées.
7. Repérer s'il y a des points **multiples** (par lesquels la courbe passe plusieurs fois) et les déterminer en trouvant t_1, t_2 tels que $\begin{cases} x(t_1) = x(t_2) \\ y(t_1) = y(t_2) \end{cases}$.

III Etude métrique

III.1 Longueur d'une courbe

III.1.1 Notion intuitive de longueur

Longueur de la courbe entre les points de paramètres t et $t + \mathrm{d}t$ est $\approx \|f'(t)\|\mathrm{d}t =$ vitesse $\times$ temps. Si on intègre entre a et b, on trouve donc la longueur de la courbe entre les points de paramètres a et b.

III.1.2 Définition
Soient $a, b \in I$. On appelle longueur (algébrique) de f sur entre les points a et b le réel $\int_a^b \|f'(t)\| dt =$.

III.1.3 Exemple
1. Calculer la longueur du cercle trigonométrique.
2. Calculer la longueur de l'arc de la parabole $y = x^2$ entre les abscisses 0 et 2.

III.2 Abscisse curviligne

On considère maintenant $f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^2)$ une courbe **régulière** (la vitesse ne s'annule pas), avec $k \geqslant 1$.

III.2.1 Définition
Soit $t_0 \in I$. On appelle abscisse curviligne de f d'origine t_0 la fonction $s : \left\{ \begin{array}{lcl} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \int_{t_0}^{t} \|f'(u)\| du \end{array} \right.$.

III.2.2 Remarque

L'information connue *a priori* sur s est la dérivée : $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \|f'\|$. Elle ne dépend pas de l'origine choisie. Dans la suite on supposera choisie une origine.

III.2.3 Proposition
L'abscisse curviligne d'origine t_0 est un $\mathcal{C}^k$ difféomorphisme de I sur son image, c'est à dire que c'est une bijection $\mathcal{C}^k$ dont la réciproque est $\mathcal{C}^k$.

III.2.4 Paramétrage par l'abscisse curviligne

Notons $J = s(I)$. Le résultat précédent permet de définir une nouvelle courbe de même support $g : \left\{ \begin{array}{lcl} J & \to & \mathbb{R}^2 \\ u & \mapsto & f(s^{-1}(u)) \end{array} \right.$. On a en fait changé la manière de parcourir la même trajectoire, et on obtient immédiatement $\left\| \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}u} \right\| = 1$ (paramétrage normal). Remarquons que $u = s(t) \Rightarrow g(u) = f(t)$.

III.2.5 Notation

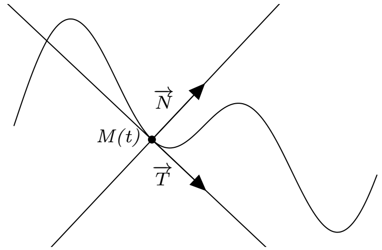
Cette dernière relation est classiquement notée $\left\| \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s} \right\| = 1$, pour indiquer que le paramétrage choisi est celui par l'abscisse curviligne. On a maintenant $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = f' \times \frac{1}{\|f'\|}$.

Si on paramètre f par s, on repère en fait les points de la trajectoire non plus par le temps de parcours, mais par la distance depuis l'origine. Il est logique que le vecteur vitesse soit de norme 1.

III.3 Repère de Frenet

III.3.1 Définition
Soit $t \in I$. On note $\overrightarrow{T}(t) = \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}$ (vecteur unitaire tangent de f en t) et $\overrightarrow{N}(t)$ (vecteur unitaire normal de f en t) le vecteur unitaire directement orthogonal à $\overrightarrow{T}(t)$.

Le repère $(f(t), \overrightarrow{T}(t), \overrightarrow{N}(t))$ est appelé repère de Frenet de f en t.

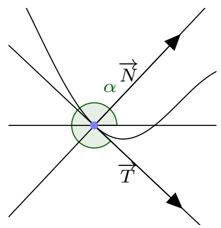


III.3.2 Théorème (Détermination angulaire)
Il existe une fonction $\alpha \in \mathcal{C}^{k-1}(I, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall t \in I \ \overrightarrow{T}(t) = \cos\alpha(t)\vec{\imath} + \sin\alpha(t)\vec{\jmath} = \vec{u}_{\alpha(t)}.$$

Ainsi $\alpha(t)$ est l'angle entre $\vec{\imath}$ et $\overrightarrow{T}$.

III.3.3 Illustration



III.3.4 Proposition

1. *On a alors $\overrightarrow{N(t)} = -\sin\alpha(t)\vec{\imath} + \cos\alpha(t)dt = \vec{v}_{\alpha(t)}$*
2. *Comme $\overrightarrow{T} = \frac{df}{ds}$, on en déduit que $\frac{dx}{ds} = \cos\alpha$ et $\frac{dy}{ds} = \sin\alpha$.*

III.3.5 Exemple
Déterminer la fonction $\alpha(t)$ pour la courbe représentative de l'exponentielle.

III.4 Courbure

III.4.1 Définition

On appelle courbure la dérivée de la fonction α par rapport à s :

$$\gamma = \frac{d\alpha}{ds}$$

Comme α est un angle, il n'a pas d'unité. γ s'exprime donc en m^{-1}.

III.4.2 Interprétation

1. Si $\gamma > 0$, c'est que la détermination angulaire croit, c'est à dire que la courbe tourne vers la gauche.
2. Si $\gamma < 0$, c'est que la détermination angulaire décroît, c'est à dire que la courbe tourne vers la droite.
3. Si γ est grand en valeur absolue, c'est que α change rapidement, c'est à dire que la courbe tourne "vite".

III.4.3 Théorème (Formules de Frenet)

On a

$$\frac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \gamma\overrightarrow{N} \text{ et } \frac{d\overrightarrow{N}}{ds} = -\gamma\overrightarrow{T}$$

Preuve.
On a $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}\alpha}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} = \gamma\overrightarrow{N}$. ∎

III.4.4 Exemple

Calculer l'expression du vecteur vitesse et du vecteur accélération en fonction de $\overrightarrow{T}, \overrightarrow{N}, \gamma$.

III.4.5 Exemple

1. Courbure du cercle trigonométrique : $\gamma = 1$.
2. Courbure de la courbe représentative de ch.

III.4.6 Corollaire

Le point t (d'abscisse curviligne $s(t)$) est birégulier ssi $\gamma(t) \neq 0$. Dans ce cas on définit le rayon de courbure en ce point par $R = \frac{1}{\gamma}$

III.4.7 Dans le repère de Frenet

Si on calcule $[\overrightarrow{T}, \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s}]$ (produit mixte, c'est le déterminant dans le plan qui ne dépend pas du ROND choisi pour le calculer), on obtient γ en prenant les coordonnées dans la base de Frenet.

Hors, $\overrightarrow{T} = \frac{1}{\|f'\|}f'$ et $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\|f'\|} \times \left(\left(\frac{1}{\|f'\|}\right)' f' + \frac{1}{\|f'\|}f''\right)$.

Ainsi $\gamma = [\frac{1}{\|f'\|}f', \frac{1}{\|f'\|} \times \left(\left(\frac{1}{\|f'\|}\right)' f' + \frac{1}{\|f'\|}f''\right)] = [[\frac{1}{\|f'\|}f', [\frac{1}{\|f'\|^2}f''] = \frac{1}{\|f'\|^3}[f', f'']$ (linéarité + caractère alterné). Finalement

$$\gamma = \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^3 \left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}\right]$$

III.4.8 Exercice

Traduire cette formule en fonction des fonctions coordonnées x, y. Et si f est la courbe $t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \varphi(t) \end{pmatrix}$?

IV Enveloppe, développée

IV.1 Courbe développée

IV.1.1 Définition

Soit $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}^2)$ une courbe birégulière. Le rayon de courbure au point t est $R(t) = \frac{1}{\gamma(t)}$ et le centre de courbure est le point $C(t) = M(t) + R(t)\overrightarrow{N}(t)$ ie $\overrightarrow{MC} = R\overrightarrow{N}$.

On peut évidemment repérer M par son abscisse curviligne et exprimer toutes les quantités en fonction de s.

IV.1.2 Interprétation

Au point de paramètre $t_1 \in I$, le cercle tangent en $\overrightarrow{T(t_1)}$ qui “ressemble” le plus à la courbe est le cercle centré en $C(t_1)$ et de raton $R(t_1)$. On l'appelle cercle de courbure en t_1.

IV.1.3 Définition

Le lieu des centres de courbure d'une courbe s'appelle la courbe développée. C'est la courbe $t \mapsto C(t)$.

IV.2 Enveloppe

IV.2.1 Définition

Soit $(\mathcal{D}_t)_{t\in I}$ une famille de droite. On dit que $(\mathcal{D}_t)_{t\in I}$ admet la courbe $f : t \mapsto M(t)$ comme enveloppe ssi pour tout $t \in I$ on a

1. $M(t) \in \mathcal{D}_t$
2. *$\mathcal{D}_t$ est tangente à f en $M(t)$.*

IV.2.2 Mise en équation

On se donne un points $A(t)$ et un vecteur directeur $\vec{u}(t)$ pour chaque droite $\mathcal{D}_t$. Ainsi $\mathcal{D}_t = \{A(t) + \lambda\vec{u}(t) |\ \lambda \in \mathbb{R}\} = A(t) + \mathrm{Vect}(\vec{u}(t))$.

On cherche donc à écrire $M(t) = A(t) + \lambda(t)\vec{u}(t)$ et il faut en plus que la tangente en $M(t)$ soit dirigée par $\vec{u}(t)$.

On suppose les fonctions en jeu dérivables et on obtient $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = A'(t) + \lambda'(t)\vec{u}(t) + \lambda(t)\vec{u}'(t)$. La condition de tangence devient $[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}, \vec{u}(t)] = 0$ qui peut se récrire $[A'(t) + \lambda(t)\vec{u}'(t), \vec{u}(t)] = 0$ (le déterminant est alterné).

IV.2.3 Proposition

Une enveloppe de la famille $\mathcal{D}_t = A(t) + \mathrm{Vect}(\vec{u}(t))$ est donnée par $f : t \mapsto M(t) = A(t) + \lambda(t)\vec{u}(t)$ où λ est une fonction vérifiant $[A'(t) + \lambda(t)\vec{u}'(t), \vec{u}(t)] = 0$.

IV.2.4 Exemple

Cherchons l'enveloppe de la famille de droites $\mathcal{D}_t : x - \cos(t)y - \sin(t) = 0$.

IV.2.5 Proposition

Soit $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}^2)$ une courbe birégulière. La courbe développée de f est également l'enveloppe de la famille $\mathcal{D}_t = M(t) + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{N}(t))$ (la famille des normales).

Preuve.

Notons $g : s \mapsto C(s) = M(s) + R(s)\overrightarrow{N}(s)$ la courbe développée de f que l'on a paramétré par l'abscisse curviligne. Clairement chaque point de g est sur une normale.

Il reste à montrer que les normales sont tangentes à g. Or $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OC}}{\mathrm{d}s} = \overrightarrow{T} + \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}\overrightarrow{N} + R \times (-\gamma\overrightarrow{T}) = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}\overrightarrow{N}$. Ainsi les tangentes à g sont dirigées par $\overrightarrow{N}$. ∎