Vérification des méthodes

Exercice 1
Donner le domaine d'étude ainsi que les symétries à effectuer pour étudier :

1. $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$
2. $t \mapsto \begin{pmatrix} \tan t \\ \cos t \end{pmatrix}$
3. $t \mapsto \begin{pmatrix} t^2 + t^4 \\ t + \frac{1}{t} \end{pmatrix}$
4. $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) + \sin(t) \\ \cos(t) - \sin(t) \end{pmatrix}$

Etude de courbes

Exercice 1
Etudier et tracer la courbe $\begin{cases} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{cases}$

Exercice 2
Etudier les points d'inflexions et les éventuelles branches infinies de $f : t \mapsto \begin{pmatrix} e^t \\ t^2 \end{pmatrix}$.

Exercice 3
Etudier et tracer la courbe $t \mapsto \begin{pmatrix} 2\cos(t) - \cos(2t) \\ 2\sin(t) - \sin(2t) \end{pmatrix}$.

Exercice 4
Paramétrer et tracer la courbe d'équation $C : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. Il s'agit d'écrire $M \in C \iff \exists t\ x = x(t)$ et $y = y(t)$.

Exercice 5
Rappel : on pose $\operatorname{th} = \frac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}}$ qui est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

On considère la courbe (Γ) définie par $\begin{cases} x : t \mapsto t - \operatorname{th} t \\ y : t \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch} t} \end{cases}$

1. Etudier (Γ)
2. (Révisions de sup)
   (a) Calculer $\operatorname{ch} t_0$ et $\operatorname{th} t_0$ pour t_0 tel que $\operatorname{sh} t_0 = 1$. Calculer ensuite t_0 sous la forme d'un logarithme.
   (b) Déterminer le point A de (Γ) où la tangente est de coefficient directeur -1. Déterminer une équation cartésienne de cette tangente et la tracer sur la courbe.
3. Donner l'équation de la tangente au point M de paramètre t.
4. Cette tangente coupe l'axe des abscisses en N. Calculer la distance MN.

Frenet, courbure

Exercice 6
On considère la cycloïde paramétrée par $f : t \mapsto \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}$. Dessiner, calculer la longueur d'une arche et la courbure en tout point régulier.

Exercice 7
Calculer la longueur de la courbe représentative de ln entre les points d'abscisse 1 et x. On pourra effectuer un changement de variable $u = \frac{1}{t}$ en premier lieu.

En déduire la longueur de la courbe représentative de exp entre les points d'abscisse 0 et a.

Exercice 8
Déterminer les courbes birégulières telles que la courbure soit proportionnelle à l'abscisse curviligne, ie vérifiant $\gamma = as$ où $a \in \mathbb{R}^*$ et s est un abscisse curviligne.

Enveloppe et développée

Exercice 9
On considère la courbe paramétrée en nombres complexes par $t \mapsto e^t e^{it}$. Donner le repère de Frenet, la courbure en tout point régulier puis la courbe développée.

Exercice 10
On considère deux points P, Q parcourant le cercle unité à des vitesses angulaires respectives de 1 et $\omega \neq 1$. Calculer un représentation paramétrique de l'enveloppe des droites $\mathcal{D}_t = (P(t)Q(t))$. On pourra utiliser les nombres complexes.

Exercice 11
Déterminer la courbes développée de $\begin{cases} x : t \mapsto \operatorname{ch}(t) \\ y : t \mapsto \operatorname{sh}(t) \end{cases}$ et trouvant l'enveloppe des normales.

Exercice 12
Soit M un point sur le cercle unité, P et Q ses projections sur les axes (Ox) et (Oy). Déterminer le projeté orthogonal R de M sur (PQ). Quel est le lieu de ces projections lorsque M parcourt le cercle ?

Déterminer l'enveloppe des droites (PQ).