Dans toute la feuille, I désigne un intervalle infini de $\mathbb{R}$.

Exercice 1
Donner les développements limités en 0 suivants :

1. $\sin^2(x)$ (ordre 4)
2. $\ln(\cos(x))$ (ordre 5)
3. $\frac{1}{1+\sin(x)}$ (ordre 3)
4. $\sqrt{e^x+\tan(x)}$ (ordre 2)
5. $\frac{(\ln(1+x))^2}{1+x}$ (ordre 3)
6. $\ln(1+e^{2x})$ (ordre 2)

Exercice 2
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue et périodique. Montrer que f est bornée.

Trouver des exemples montrant que les deux hypothèses sur f sont indispensables.

Exercice 3
Soit $f\in\mathcal{C}([0,1],[0,1])$. Montrer que f possède un point fixe.

Exercice 4
Etudier d'éventuels prolongement par continuité des fonctions

$$f_1 : x\mapsto \frac{x-1}{\ln(x)}, f_2 : x\mapsto \exp(-\frac{1}{x^2}).$$

Montrer que f_2' possède une limite finie en 0. Qu'en déduire pour f ?

Exercice 5
Montrer les inégalités (et les illustrer) :

1. $\forall x\in\mathbb{R}\ e^x\geqslant 1+x$.
2. $\forall x>-1\ \ln(1+x)\leqslant x$
3. $\forall x\in[0,\frac{\pi}{2}[\ \frac{2}{\pi}x\leqslant\sin(x)\leqslant x\leqslant\tan(x)$

Exercice 6
Soit $f : I\to\mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable sur I (où $n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$). On suppose de f s'annule en $n+1$ points distincts de I. Montrer que $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur I.

Exercice 7
On définit, pour $n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$, la fonction P_n par $\forall t\in\mathbb{R}\ P_n(t)=\left[(1-t^2)^n\right]^{(n)}$.

Montrer que P_n est polynomiale et est scindée à racines simples appartenant à $[-1,1]$.

Exercice 8
Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$.

1. Déterminer l'unique application affine P telle que $P(a)=f(a)$ et $P(b)=f(b)$.
2. Soit $x_0\in]a,b[$ fixé. Montrer qu'il existe $\lambda_{x_0}\in\mathbb{R}$ tel que la fonction
$$\varphi : x\mapsto f(x)-P(x)-\lambda_{x_0}(x-a)(x-b)$$
s'annule en x_0.
3. Montrer qu'il existe $c_{x_0}\in]a,b[$ tel que $\lambda_{x_0}=\frac{1}{2}f''(c_{x_0})$.
4. Montrer que
$$\forall x\in[a,b],\ |f(x)-P(x)|\leq\sup_{t\in[a,b]}|f''(t)|\,\frac{(x-a)(b-x)}{2}$$
5. (ENSAM) Donner une application en étudiant la méthode des trapèzes pour le calcul approché d'une intégrale.
Plus précisément, si $\psi\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ est une fonction continue, affine par morceaux, qui approxime f par la méthode des trapèzes sur une subdivision régulière à n intervalles, montrer que
$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b\psi(x)\mathrm{d}x\right|\leq\frac{1}{12}\sup_{t\in[a,b]}|f''(t)|\,\frac{(b-a)^3}{n^2}.$$

Exercice 9
Calculer la dérivée n-ième de $f : x\mapsto\ln(1+x)$, $g : x\mapsto e^x\sin(x)$.

Exercice 10
Trouver J pour que $f : \left\{\begin{array}{ccc}[0,+\infty[& \to & J\\ x & \mapsto & xe^x\end{array}\right.$ soit une bijection. On note g sa réciproque.

Donner des arguments pour justifier la continuité et la dérivabilité de g et préciser une expression de g'. On peut de même justifier la classe $\mathcal{C}^\infty$ de g. Donner un développement limité à l'ordre 2 de g au voisinage de 0.

Exercice 11
Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

1. On suppose dans cette question que $f(2x)=f(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. Que dire de f ?
2. On suppose maintenant $f(x+y)=f(x)+f(y)$ pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Même question.
3. (*) L'hypothèse est $f(x+y)=f(x)f(y)$. Même question.

Exercice 12
Montrer que toute fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Soit $a>0$. En utilisant ce résultat, déterminer toutes les fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f''(x)+a^2f(-x)=0\ (E).$$