Devoir surveillé n°1

Durée : 2H. Calculatrices interdites. **Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction et la propreté : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.**

Lisez l'énoncé attentivement et en entier **AVANT** de commencer chaque exercice.

Exercice 1 (Une courbe paramétrée)

On considère la courbe paramétrée définie par $f : \begin{cases} x : t \mapsto t^2 - \frac{2}{t} \\ y : t \mapsto t^2 + \frac{1}{t^2} \end{cases}$.

On note Γ son support.

1. Préciser le domaine sur lequel vous allez étudier f.
2. Donner les variations de x, y.
3. En quel(s) point(s) la courbe présente-t-elle une tangente verticale ? horizontale ?
4. Préciser toutes les intersections de Γ avec les axes (Ox) et (Oy) ainsi que les coefficients directeurs des tangentes en ces points.
5. Etude quand $t \to \pm\infty$
   (a) Montrer que la courbe admet une asymptote en $\pm\infty$.
   (b) Préciser la position de Γ par rapport à cette asymptote.
6. Etude quand $t \to 0$
   (a) La courbe admet-elle une branche infinie quand t tend vers 0^+ ? vers 0^- ? Si oui les préciser.
   (b) Déterminer les coefficients $a, b \in \mathbb{R}$ tels que
   $$y(t) - ax(t)^2 - bx(t) \underset{t \to 0}{\to} 0$$
   On dit que la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = ax^2 + bx$ est asymptote à la courbe en 0.
   (c) En étudiant le signe de $t \mapsto y(t) - ax(t)^2 - bx(t)$, préciser la position de $\mathcal{P}$ par rapport à Γ.
   On montrera que $\mathcal{P}$ et Γ n'ont qu'un seul point en commun sans chercher à exprimer les coordonnées exacte de ce point.
7. Montrer que la courbe admet une tangente de pente $\frac{4}{3}$ au point de paramètre -1.
8. Etude des éventuels points doubles.
   Soient t, u dans le domaine de définition de f tels que $t < u$.
   (a) On pose $S = t + u$ et $P = tu$.
   Montrer que $M(t) = M(u)$ ssi $\begin{cases} SP = -2 \\ S(P^2 - 1) = 0 \end{cases}$.
   μ-remarque : on a noté comme d'habitude $M(t)$ le point de la courbe de paramètre t.
   (b) Montrer que $M(t) = M(u)$ ssi t et u sont racines de l'équation polynomiale $\alpha^2 - 2\alpha - 1 = 0$ d'inconnue α. On montrera au passage que $S \neq 0$.
   (c) En déduire qu'il existe un unique point double dont on calculera les coordonnées.
9. Tracer ! Vous avez **beaucoup** d'informations à faire figurer sur cette figure. Soyez attentionné.
   On donne, en cas de besoin, les valeurs approchées suivantes : $\frac{4-2^{\frac{2}{3}}}{6} \approx 0,4$, $2^{\frac{2}{3}} \approx 1,6$ et $2^{-\frac{2}{3}} \approx 0,63$.

Exercice 2 (Méthode de Newton)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et soit $f \in \mathcal{C}^2([a,b], \mathbb{R})$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. On suppose de plus que

(i) $f(a) < 0 < f(b)$.
(ii) $\forall x \in [a,b]\ f'(x) > 0$
(iii) $\forall x \in [a,b]\ f''(x) > 0$

On définit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la manière suivante :

— $x_0 = b$.
— pour $n \in \mathbb{N}$, x_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de la tangente T_n à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse x_n et de l'axe (Ox).

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution ω dans l'intervalle **ouvert** $]a, b[$. La suite du problème consiste à trouver une méthode d'approximation de cette solution.
2. Montrer que l'on peut poser $m_1 = \inf_{[a,b]} f' \in \mathbb{R}$ et $M_2 = \sup_{[a,b]} f'' \in \mathbb{R}$ et que ces nombres sont strictement positifs.
3. Quelle hypothèse sur f permet d'affirmer que la tangente T_n coupe toujours l'axe (Ox) ?
4. Dans cette question **uniquement**, on pose $f : x \mapsto x^2 - 2$ sur l'intervalle $[1, 2]$.
   (a) Montrer que cette fonction vérifie les hypothèses.
   (b) Tracer la courbe de f et représenter x_0, x_1, x_2.
   (c) Donner l'équation de T_n en fonction de x_n.
   (d) En déduire l'expression de x_{n+1} en fonction de x_n.
   (e) Calculer x_1, x_2, x_3.
5. On revient au cas général.
   (a) Donner l'équation de la tangente T_n.
   (b) En déduire x_{n+1} en fonction de x_n.
6. On pose $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} [a, b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - \frac{f(x)}{f'(x)} \end{array} \right.$.
   (a) Etudier les variations de φ sur $[a, b]$.
   (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}\ x_n \in]\omega, b]$.
   (c) Donner le signe de $x \mapsto \varphi(x) - x$ et en déduire les variations de la suite $(x_n)_n$.
   (d) Montrer que $x_n \underset{n \to +\infty}{\to} \omega$.
7. Essayons d'estimer la vitesse de convergence de la suite $(x_n)_n$.
   (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer $x_{n+1} - \omega$ en fonction de $x_n - \omega$. On fera apparaître $f(x_n) - f(\omega)$.
   (b) Citer l'inégalité de Taylor-Lagrange pour f sur $[\omega, x_n]$ à l'ordre 2.
   (c) En déduire que $0 < x_{n+1} - \omega < \frac{M_2}{2m_1}(x_n - \omega)^2$.
   (d) Montrer qu'il existe un rang N tel que $\forall n \geqslant N\ \left(\frac{M_2}{2m_1}(x_n - \omega)\right)^2 < 1$. On note $k = \left(\frac{M_2}{2m_1}(x_N - \omega)\right)^2 \in]0, 1[$.
   (e) Montrer qu'il existe une constante c telle que pour n assez grand $0 < x_n - \omega < c \times k^{(2^n)}$.
   (f) Montrer que $(x_n - \omega) = o_{+\infty}(q^n)$ pour tout $q \in]0, 1[$. Ainsi (x_n) converge plus vite que tout suite géométrique.
8. On suppose qu'on a obtenu $c = 1$ et $k = \frac{1}{2}$. Au bout de combien d'itérations (le résultat pourra ne pas être entier) a-t-on obtenu une approximation à 10^{-10} près ? à 10^{-100} près ? à 10^{-1000} près ? Comparer à une suite géométrique de raison 10^{-10}.
9. On revient à la fonction $f : x \mapsto x^2 - 2$. On peut montrer facilement que $2 - \sqrt{2} < \frac{2}{3}$.
   (a) En utilisant l'inégalité 7c, donner la précision de l'approximation de $\sqrt{2}$ par x_3. Et par x_4 ?
   (b) Si on se sert plutôt du fait que $x_1 - \sqrt{2} < \frac{1}{4}$, quelle inégalité obtient-on pour x_3 ? et pour x_4 ?