Table des matières

Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Applications linéaires

I.1 Propriétés générales

I.1.1 Définition

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$. On dit que f est linéaire ssi

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \forall x, y \in E \ f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

On a alors $f(0_E) = 0_F$.

*Si $F = \mathbb{K}$ on dit que f est une **forme linéaire**. L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$.*

I.1.2 Exemple

Quelques exemples important (avec des notations évidentes) : $f \mapsto f', f \mapsto \int\limits_a^b f, (u_n)_n \mapsto (u_{n+1})_n, P \mapsto P(X+1)$

D'autres plus géométriques : les projection (orthogonales ou non) et symétries, les rotations du plan et de l'espace.

I.1.3 Proposition

1. *$\mathcal{L}(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*
2. *Quand elle existe, la composée de deux applications linéaire est linéaire.*
3. *Quand elle existe, la bijection réciproque d'une application linéaire est linéaire.*

I.1.4 Définition

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Son noyau est $\ker(f) = f^{-1}(\{0\}) = \{x \in E | \ f(x) = 0\}$ et son image est $\mathrm{Im}(f) = f(E) = \{y \in F | \ \exists x \in E \ y = f(x)\}$.

I.1.5 Rappel

Quand f est donnée par une matrice ou par son expression en fonction des coordonnées, $\ker(f)$ est l'ensemble des solutions du système homogène. $\mathrm{Im}(f)$ est l'espace engendré par les colonnes de cette matrice.

I.1.6 Proposition

Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$, G un sous-espace de E et H un sous-espace de F.

Alors $f(G)$ et $f^{-1}(H)$ sont des sous-espaces de F et E respectivement. En particulier $\ker(f)$ est un sous-espace de E et $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace de F.

Preuve.

— Montrons que $f(G)$ est un sous espace de F.
Soient donc $x, y \in f(G)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Montrons que $\lambda x + \mu y \in f(G)$.
Or $x, y \in f(G)$ donc on peut poser $u, v \in G$ tels que $x = f(u)$ et $y = f(v)$. Alors, par linéarité, $\lambda x + \mu y = f(\lambda u + \mu G) \in f(G)$ car $\lambda u + \mu v \in G$ (c'est un espace vectoriel).

— Montrons que $f^{-1}(H)$ est un sous-espace de E. Soient $x, y \in f^{-1}(H)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors $f(\lambda x + \mu y) = \lambda \underbrace{f(x)}_{\in H} + \mu \underbrace{f(y)}_{\in H} \in H$ car H est un sous-espace de F donc $\lambda x + \mu y \in f^{-1}(H)$ ∎

I.1.7 Rappels

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

1. f est injective ssi $\ker(f) = \{0_E\}$.
2. f est surjective ssi $\mathrm{Im}(f) = F$ (valable même si f n'est pas linéaire).
3. Si $E = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ alors $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$.

I.1.8 Opérations et endomorphismes

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ On note $f^k = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (k fois), $f^0 = Id_E$. Le théorème du binôme de Newton s'applique à f et g dans le cas où $f \circ g = g \circ f$.

I.2 Equations linéaires

I.2.1 Définition

Soit E un espace vectoriel et $a \in E$.

1. $t_a \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & a+x \end{array} \right.$ *est appelée translation de vecteur a. Cette application n'est pas linéaire mais est appelée application affine.*
2. *Soit F un sous-espace de E. L'ensemble $t_a(F) = a + F = \{a + x |\ x \in F\}$ est un **sous-espace affine** de direction F.*

I.2.2 Exemple

1. Ceci est une généralisation des droites du plan et de l'espace définies par $A + \mathrm{Vect}(\vec{u})$, ou des plans dans l'espace de la forme $A + \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$. Rappeler les conditions sur les vecteurs intervenant ici pour parler de droite ou de plan.
2. L'ensemble des solutions de $y'' + \omega^2 y = K$ (K un réel fixé) est $\frac{K}{\omega^2} + \mathrm{Vect}(\cos(\omega.), \sin(\omega.))$.

I.2.3 Exercice

Soit $\mathcal{F} = a + F$ un espace affine. Montrer que si $b \in \mathcal{F}$ alors $\mathcal{F} = b + F$.

I.2.4 Exercice

Montrer que $(a + F) \cap (b + G)$ est soit vide soit un sous-espace affine de direction $F \cap G$.

I.2.5 Equations linéaires

Une équation de la forme $f(x) = b$ où l'inconnue est x est dite linéaire ssi l'application f est linéaire.

Deux cas se présentent pour l'**ensemble** de ses solutions :

1. $b \notin \mathrm{Im}(f)$ et dans ce cas l'ensemble des solutions est $\emptyset$
2. $b \in \mathrm{Im}(f)$. Si on note x_0 un antécédent de b (une solution de l'équation que l'on qualifie de *particulière*), alors l'ensemble des solutions est $x_0 + \ker(f)$ (qui est un espace affine).

Dans le deuxième cas, pour $x \in E$ on a en effet $f(x) = b \iff f(x) = f(x_0) \iff f(x - x_0) = 0_F \iff x - x_0 \in \ker(f) \iff x \in x_0 + \ker(f)$.

I.2.6 Exercice

Soient $u, v \in \mathbb{R}^3$. Résoudre $x \wedge u = v$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^3$.

Si u et v ne sont pas orthogonaux, l'équation n'a pas de solution. Si $u = 0$ et $v \neq 0$ il n'y a pas de solution non plus.

Si $v = 0$ et $u \neq 0$, l'ensemble des solution est $\mathrm{Vect}(u)$.

Supposons $u, v \neq 0$ et orthogonaux. Notons $w = u \wedge v$. Alors $w \wedge u$ est colinéaire à v et non nul, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\lambda.(w \wedge u) = v$ ie. $(\lambda w) \wedge u = v$ et on a trouvé une solution particulière.

L'ensemble des solutions est alors $\lambda w + \mathrm{Vect}(u)$.

I.3 Applications linéaires et dimension

I.3.1 Proposition

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

Soit H un supplémentaire de $\ker(f)$ dans E. $f_H : H \to \mathrm{Im}(f)$ est un isomorphisme.

Preuve.
On a $f_{|H} : \left\{ \begin{array}{ccc} H & \to & \mathrm{Im}\, f \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$ et $H \oplus \ker(f) = E$. Il s'agit bien d'une application linéaire de $\mathcal{L}(H, \mathrm{Im}\, f)$.

— $\ker f_{|H} = \{x \in H |\ f(x) = 0\} = H \cap \ker f = \{0_E\}$ car H et $\ker f$ sont en somme directe.

— Soit $y \in \mathrm{Im}\, f$. Alors il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Or on peut écrire $x = x_H + x_K$ avec $x_H \in H$ et $x_K \in \ker f$. Ainsi $f(x) = f(x_H) + f(x_K) = f(x_H) + 0_E$ et donc $y = f(x_H) = f_{|H}(x_H)$. Donc $\mathrm{Im}\, f_{|H} = \mathrm{Im}\, f$.

Finalement $f_{|H}$ est bien un isomorphisme linéaire. ∎

I.3.2 Théorème
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et supposons E de dimension finie. Alors $\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \mathrm{rg}(f)$.

I.3.3 Exemple
Si E est de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ est une forme linéaire non nulle, alors $\dim(\ker(f)) = n-1$.

I.3.4 Corollaire
Soit E, F des espaces de ***même*** *dimension et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.*

$$f \text{ est bijective} \iff f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective}$$

Dans le cas où f est un endomorphisme, les dimensions de E et F sont évidemment égales et ce résultat s'applique.

I.3.5 Exemple
Soient $a_0, \dots a_n \in \mathbb{K}$ des scalaires deux à deux distincts.

L'application $\varphi : \begin{cases} \mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \mapsto & \begin{pmatrix} P(a_0) \\ \vdots \\ P(a_n) \end{pmatrix} \end{cases}$ est injective (compter les racines d'un polynôme du noyau, seul le polynôme nul en possède autant) et donc bijective.

En conséquence, si on fixe $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{K}$ (quelconques cette fois), il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $\forall i \in [\![0,n]\!]\ P(a_i) = y_i$, ou encore par $n+1$ points d'abscisses 2 à 2 distinctes il passe une unique courbe polynomiale de degré n ou moins.

Pour déterminer P, on calcule les P_i tels que $\varphi(P_i) = e_i$ le $i$ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$. Un raisonnement rapide sur les racines (2 à 2 distinctes) de P_i montre que $P_i = \alpha_i \prod\limits_{\substack{j=0 \\ \neq i}}^{n} (X - a_j)$ et comme $P_i(a_i) = 1$ on trouve la valeur de α_i.

Ensuite, la linéarité de φ montre que $\varphi(\sum\limits_{i=0}^{n} y_i P_i) = \sum\limits_{i=0}^{n} y_i e_i$ et donc $P = \sum\limits_{i=0}^{n} y_i P_i$.

I.3.6 Corollaire
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est de dimension finie.

$$f \in Gl(E) \iff \exists g \in \mathcal{L}(E)\ f \circ g = Id_E \iff \exists g \in \mathcal{L}(E)\ g \circ f = Id_E$$

I.3.7 Remarque

C'est le pendant du théorème qui énonce qu'une matrice est inversible ssi on trouve un inverse à gauche ou un inverse à droite.

II Bases en dimension quelconques

II.1 Familles libres

II.1.1 Rappel

Si E est un $\mathbb{K}$-ev, une famille $(u_1, \dots, u_n)$ est dite libre ssi $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}\ \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k u_k = 0_E \iff \forall i \in [\![1,n]\!]\ \lambda_i = 0_{\mathbb{K}}$.

La seule manière d'obtenir le vecteur nul par combinaison linéaire des u_k est la combinaison triviale.

II.1.2 Rappels de sup

Soit E un espace de dimension n.

- une famille qui contient le vecteur nul est liée.
- une famille libre possède au plus n vecteurs.
- une famille libre possédant n vecteurs est une base de E.
- on ne modifie pas le caractère libre en effectuant une opération élémentaire sur les vecteurs d'une famille.
- une famille est libre ssi chacun de ses vecteurs n'est pas une combinaison linéaire des autres.

II.1.3 Familles infinies

On se place dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Les familles suivantes sont des familles infinies.

1. $(x \mapsto \sin(nx))_{n \in \mathbb{Z}}$.
2. $(x \mapsto e^{ax})_{a \in \mathbb{C}}$.

Il s'agit de se donner un ensemble d'élément repérés par un indice. Pour le deuxième exemple, on a associé une fonction à chaque nombre complexe.

II.1.4 Définition
Soit E un espace vectoriel de dimension quelconque et X un ensemble (quelconque lui aussi). Soit $(u_i)_{i \in X}$ une famille de vecteurs de E. Cette famille est dite libre ssi pour tout $I \subset X$ ensemble ***fini****, la famille $(u_i)_{i \in I}$ est libre.*

D'une manière équivalente, aucun des u_i n'est une combinaison linéaire (finie, évidemment...) des autres u_j.

II.1.5 Exemple
Dans $\mathbb{K}[X]$, la famille $(1, X, X^2, \dots) = (X^i)_{i\in\mathbb{N}}$ est libre. Preuve : unicité des coefficients d'un polynôme.

II.1.6 Exemple
Dans $\mathbb{R}^\mathbb{R}$, la famille $(\cos(n.))_{n\in\mathbb{N}}$. est libre. Montrons par récurrence que $(\cos(n.))_{i\in[\![0,k]\!]}$ est libre, sachant que le cas $k = 0$ est trivial.

Supposons que $(\cos(n.))_{n\in[\![0,k]\!]}$ est libre et soient $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{k+1} \in \mathbb{R}$. Supposons que $\forall x \in \mathbb{R} \sum_{n=0}^{k+1} \lambda_n \cos(nx) = 0$ (1).

Soit $x \in \mathbb{R}$. On dérive deux fois la relation précédente : $\sum_{n=0}^{k+1} -n^2\lambda_n \cos(nx) = 0$ (2)

Si on calcule $(k+1)^2(1)+(2)$ on obtient $\sum_{n=0}^{k} \lambda_n((k+1)^2 - n^2)\cos(nx) = 0$ (les derniers termes s'annulent). Par hypothèse de récurrence, $\lambda_n((k+1)^2-n^2) = 0$ pour tout $n \in [\![0,k]\!]$ ie $\lambda_n = 0$.

Finalement, en reprenant (1), $\lambda_{n+1} = 0$ car $\cos((n+1).)$ n'est pas la fonction nulle.

II.1.7 Exemple
Soit $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille de polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}\ \deg(P_k) = k$. Alors cette famille est libre.

En effet, si $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i = 0$ pour un entier n et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ alors le coefficient dominant de la somme est $\lambda_n\times$ le coefficient dominant de P_n. Donc $\lambda_n = 0$.

Ceci constitue l'hérédité d'une récurrence qui est trivialement initialisée (un polynôme de degré nul est un polynôme constant non nul donc constitue une famille libre à 1 élément).

II.1.8 Proposition
Toute famille de polynômes tous non nuls et de degrés deux à deux distincts est libre.

II.2 Familles génératrices

II.2.1 Rappels de sup

Soit E un espace de dimension n et $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_p) \in E^p$ une famille.

- si $\mathcal{F}$ est génératrice de E alors $p \geqslant n$.
- on peut avoir $p > n$ sans que $\mathcal{F}$ soit génératrice de E
- si $p = n$ et que $\mathcal{F}$ est génératrice, alors $\mathcal{F}$ est une base de E.
- si $e_p \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{p-1})$ alors $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{p-1}) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$
- on ne modifie pas l'espace engendré en faisant subir une opération élémentaire à la famille $\mathcal{F}$.

II.2.2 Exemple
Montrer que $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 |\ 2x + y - z + t = 0 \text{ et } x - 3y + t = 0\}$ est un espace vectoriel et en donner une famille génératrice.

II.2.3 Définition-Proposition
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $A \subset E$. L'ensemble des sous-espaces de E qui contiennent A possède un minimum pour l'inclusion. Cet espace est noté $\mathrm{Vect}(A)$ et est appelé espace vectoriel engendré par A.

On peut le décrire comme l'ensemble des combinaisons linéaires (finies) d'éléments de A.

Preuve.
Notons $\Omega = \{F \subset E|\ A \subset F \text{ et } F \text{ est un sev de E}\}$. Alors $\Omega \neq \emptyset$ car $E \in \Omega$.

Posons $G = \bigcup_{F\in\Omega} F$ l'intersection de tous les éléments de Ω. Clairement (par construction), $A \subset G$.

Alors $0_E \in G$ car 0_E est un élément de tout sous espace de E. Si $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $x, y \in G$ alors x et y sont élément de tout $F \in \Omega$ et donc $\lambda x + \mu y$ est élément de tout $F \in \Omega$. Ainsi $\lambda x + \mu y \in G$ et G est bien un sous-espace de E.

SI maintenant on considère F un sous espace de E qui contient A alors $F \in \Omega$ et par construction $G \subset F$, ce qui prouve que G est bien le minimum de Ω pour l'inclusion.

Finalement, toute combinaison linéaire d'éléments de A est dans G par stabilité, et l'ensemble des combinaisons d'éléments de A est un sev de E (cf cours de sup).■

II.2.4 Définition
*Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, X un ensemble et $(e_i)_{i\in X}$ une famille d'éléments de E. On fit que $(e_i)_{i\in X}$ est génératrice de E ssi pour tout $u \in E$ on peut trouver un ensemble **fini** $I \subset X$ et $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille de scalaires tels que $u = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$.*

Ainsi tout élément de E est une combinaison linéaire (la somme est finie) d'éléments de $(e_i)_{i\in X}$ et on a $E = \mathrm{Vect}((e_i)_{i\in X})$.

II.2.5 Exemple
$(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}[X]$.

II.2.6 Exemple
Soit $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille de polynômes vérifiant $\forall k \in \mathbb{N}\ \deg(P_k) = k$. Montrons que cette famille est génératrice de $\mathbb{K}[X]$.

En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(P_0, \dots, P_n)$ est libre dans $\mathbb{K}_n[X]$ donc engendre $\mathbb{K}_n[X]$ qui est de dimension $n+1$. Comme tout polynôme non nul possède un degré n, il est combinaison linéaire des $n+1$ premier P_k, ce qui prouve le caractère générateur.

Un exemple de telle base est la famille $((X-a)^k)_{k\in\mathbb{N}}$ pour un $a \in \mathbb{K}$ fixé. Les coordonnées d'un polynôme P sont alors les $\frac{P^{(k)}(a)}{k!}$ d'après le théorème de Taylor.

II.3 Bases

II.3.1 Rappels de sup

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n.

1. les bases de E sont toutes de cardinal n.
2. De toute famille génératrice de E on peut extraire une base.
3. toute famille libre dans E peut être complétée en une base de E.

II.3.2 Définition
Soit X un ensemble et E un $\mathbb{K}$-ev. On dit que $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in X}$ est une base de E ssi $(e_i)_{i\in X}$ est à la fois libre et génératrice de E.

Dans ce cas, pour tout $u \in E$ il existe un unique ensemble fini $I \subset X$ et une unique famille de scalaires $(x_i)_{i\in I}$ (appelée coordonnées de u dans $\mathcal{B}$) tels que $u = \sum\limits_{i\in I} x_i e_i$.

II.3.3 Proposition
$\mathcal{B} = (X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$ appelée base canonique.

II.3.4 Remarque

De manière plus générale, si on choisit $P_k \in \mathbb{K}[X]$ de degré k pour tout $k \in \mathbb{N}$ alors $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.

II.3.5 Proposition
Soit $(e_i)_{i\in X}$ une famille de vecteurs de E.

$(e_i)_{i\in X}$ est une base ssi $(e_i)_{i\in X}$ est libre et maximale (une famille qui la contient strictement n'est plus libre) ssi $(e_i)_{i\in X}$ est génératrice de E et minimale (une sous famille stricte n'est plus génératrice de E)

Preuve.
Si $(e_i)_{i\in X}$ est une base alors elle est libre par définition. Montrons que dans ce cas elle est maximale.

Soit $x \in E$. Montrons que $(e_i)_{i\in X} \cup \{x\}$ n'est pas libre. Or x est une combinaison des e_i car $(e_i)_{i\in X}$ est génératrice. Donc $(e_i)_{i\in X} \cup \{x\}$ n'est pas libre. Ainsi $(e_i)_{i\in X}$ est maximale (on ne peut pas lui ajouter ne serait-ce qu'un vecteur).

Supposons maintenant que $(e_i)_{i\in X}$ est libre et maximale. Montrons qu'elle est génératrice de E et minimale. Soit $x \in E$. Alors la famille $(e_i)_{i\in X} \cup \{x\}$ n'est pas libre par hypothèse, donc x est une combinaison des $(e_i)_{i\in X}$ (ce ne peut être un des e_i qui est combinaison des autres e_j). Pour prouver la minimalité, retirons un vecteur e_j de la famille. e_j n'est pas combinaison linéaire des autres e_i (la famille de départ est supposée libre...). Ainsi $(e_i)_{i\in X, i\neq j}$ n'engendre pas E.

Finalement, supposons $(e_i)_{i\in X}$ génératrice et minimale. Montrons que $(e_i)_{i\in X}$ est une base. Il reste à montrer que $(e_i)_{i\in X}$ est libre. Si elle ne l'était pas, on aurait un e_j combinaison des autres, que l'on pourrait retirer de la famille sans modifier l'espace engendré et on aurait trouvé une sous-famille stricte et génératrice de E.■

III Sous-espaces

III.1 Supplémentaires

III.1.1 Définition
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces. La somme de F et G est $F + G = \{x_F + x_G |\ x_F \in F \text{ et } x_G \in G\}$. C'est un espace vectoriel et on a même $F + G = \mathrm{Vect}(F \cup G)$.

III.1.2 Exemple
Dans $\mathbb{R}^2$, la somme de deux droites vectorielles non confondues est $\mathbb{R}^2$.

Dans $\mathbb{R}^3$ la somme d'un plan et d'une droite non contenue dans ce plan est $\mathbb{R}^3$.

III.1.3 Famille génératrice

Si on dispose d'une famille (u_i) génératrice de F et d'une famille (v_i) génératrice de G, alors la concaténation de ces familles engendre $F + G$.

III.1.4 Exemple
Donner une base de P_1+P_2 où $P_1 : x-y+2z=0$ et $P_2=\mathrm{Vect}(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix})$.

III.1.5 Définition
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F,G deux sous-espaces. On dit que F et G sont supplémentaires dans E et on note $E=F\oplus G$ ssi

$$\forall x\in E \exists (x_F,x_G)\in F\times G\ x=x_F+x_G$$

Avec ces notations, x_F est le projeté de x sur F dans la direction G (ou parallèlement à G) et x_G le projeté de x sur G dans la direction F.

III.1.6 Caractérisation

On a également $E=F\oplus G \iff \begin{cases}E=F+G\\ F\cap G=\{0_E\}\end{cases}$.

III.1.7 Exemple
1. $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})=\mathcal{S}_n(\mathbb{K})\oplus\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ et la décomposition associée est $A=\frac{1}{2}(A+{}^tA)+\frac{1}{2}(A-{}^tA)$. Ainsi la projection d'une matrice A sur l'ensemble des matrices symétrique, dans la direction de l'ensemble des matrices anti-symétriques est $\frac{A+{}^tA}{2}$.
2. Notons $F=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}|\ f \text{ est paire}\}$ et $G=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}|\ f \text{ est impaire}\}$. Alors $\mathbb{R}^\mathbb{R}=F\oplus G$, les projections d'une fonction f sur F et G étant respectivement $x\mapsto\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $x\mapsto\frac{f(x)-f(-x)}{2}$.

III.1.8 Lien avec les bases

Dans le cas de la dimension finie, $E=F\oplus G$ ssi la concaténation d'une base de F et d'une base de G est une base de E. On dit que la base obtenue (par concaténation) est **adaptée** à la somme $F\oplus G$.

On a alors évidemment

$$\dim(E)=\dim(F)+\dim(G)$$

Dans ce cadre, déterminer les projections se ramène au calcul de coordonnées dans une base adaptée.

III.1.9 Corollaire
En dimension finie (ou pas, mais on ne l'a pas prouvé), tout sous-espace possède au moins un supplémentaire.

III.1.10 Théorème (Théorème de)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F,G deux sous-espaces de dimensions finies ; Alors $F+G$ est de dimension finie et

$$\dim(F+G)=\dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G)$$

III.1.11 Corollaire
Dans un espace de dimension finie, on a $E=F\oplus G \iff \begin{cases}F+G=E\\ \dim(F)+\dim(G)=\dim(E)\end{cases} \iff \begin{cases}F\cap G=\{0_E\}\\ \dim(F)+\dim(G)=\dim(E)\end{cases}$.

III.1.12 Exercice
Caractériser (donner une ou des CNS sur) les espaces supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

III.2 Hyperplans

III.2.1 Définition
Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Un sous-espace H de E est appelé hyperplan ssi H admet une droite comme supplémentaire.

III.2.2 Proposition
Les hyperplan de E de dimension $n>0$ sont exactement les sous-espaces de dimension $n-1$.

III.2.3 Exemple
Les droites du plan, les plans dans l'espace. Remarquer les équations cartésiennes similaires dans ces cas.

III.2.4 Hyperplan et formes linéaires

Soit H un hyperplan. Nous allons montrer que H est le noyau d'au moins une forme linéaire f et que si $H=\ker(g)$ pour $g\in\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ alors f et g sont proportionnelles.

Soit $\mathbb{K}u$ une droite supplémentaire de H dans E (ie. $u\notin H$). Pour $x\in E$ on peut alors écrire $x=x_H+\lambda_x u$ de manière unique. On pose $f:\left\{\begin{array}{ccc}E&\to&\mathbb{K}\\ x&\mapsto&\lambda_x\end{array}\right.$. On prouve très facilement (voir les projecteurs) que f est une forme linéaire non nulle car $f(u) = 1$. De plus, pour $x \in E$, $f(x) = 0 \iff \lambda_x = 0 \iff x \in H$. Ainsi $H = \ker(f)$.

Supposons maintenant que $g \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ vérifie $\ker(g) = H$. Alors g est une forme linéaire non nulle (sinon son noyau est E) et on a avec les notations précédentes, $g(x) = g(x_H) + \lambda_x g(u) = \lambda_x g(u) = g(u)f(x)$. Ainsi $g = \underbrace{g(u)}_{\in \mathbb{K}} \times f$.

Exo : on peut en fait décrire g de la même manière que f ($g : x \mapsto \mu_x$). Avec quel(s) vecteur(s) ?

III.2.5 Théorème
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n > 0$ et $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une base de E.

Pour un hyperplan H il existe $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ non nul tel qu'une équation de H dans la base $\mathcal{B}$ soit $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$ ce qui signifie que $x \in E$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ (dans $\mathcal{B}$) appartient à H ssi $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$.

Toutes les autres équations de H sont proportionnelles à celle-ci.

Preuve.
Posons $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ telle que $H = \ker(f)$. Alors $x = \sum_{i=1}^{n} x_ie_i \in H \iff f(x) = 0 \iff f(e_1)x_1 + f(e_2)x_2 + \cdots + f(e_n)x_n = 0$. En notant $a_i = f(e_i)$ il ne reste qu'à vérifier que ces scalaires sont non tous nuls. S'ils l'étaient, f serait l'application nulle car son image est engendrée par $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$.

on a bien trouvé une équation (à coefficients non tous nuls) de H dans la base $\mathcal{B}$. Toutes les autres équations de H sont de la forme $g(x) = 0$ où g est une forme linéaire, donc sont proportionnelles (l'application $x \mapsto \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i$ est linéaire pour toute famille $(\beta_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ par composition). ■

III.2.6 Remarque

On retrouve le fait pour les plans de $\mathbb{R}^3$ et les droites de $\mathbb{R}^2$ d'avoir des équations "simples". Dans quelle base se place-t-on dans ces cas ?

III.2.7 Exercice
Montrer que $\{P \in \mathbb{K}_n[X] |\ P(1) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{K}_n[X]$.

III.2.8 Intersection d'hyperplans

Soient $H_1, \ldots H_p$ des hyperplans de E de dimension $n \geqslant p$ et $\mathcal{B}$ une base de E. L'intersection $H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_p$ est l'ensemble des solutions d'un système S à n inconnues (les coordonnées dans $\mathcal{B}$) et p équations. Le rang de S est au maximum p donc l'ensemble des solutions (notre intersection) est de dimension au moins $n - p$.

Quel est le cas d'égalité pour les dimensions ?

III.2.9 Théorème
Soit E de dimension $n > 0$ et $p \leqslant n$.

1. *l'intersection de p hyperplans de E est de dimension au moins $n - p$.*
2. *réciproquement, tout sous-espace de dimension p est l'intersection de $n-p$ hyperplans (et possède donc un système d'équation à $n-p$ équations et n inconnues dans une base fixée de E).*

Preuve.
Il nous reste à prouver le deuxième point.

Soit F un sous-espace de E de dimension p. Notons $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de F et complétons cette base en $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Soit $x \in E$ et $\begin{pmatrix} x_1 \\ \\ x_n \end{pmatrix}$ ses coordonnées dans $\mathcal{B}$. Alors $x \in F \iff x_{p+1} = 0$ et $\ldots$ et $x_n = 0$.

Si on note $H_i : x_i = 0$ pour $i \in [\![p+1, n]\!]$ des hyperplans décrits par leurs équations dans $\mathcal{B}$, alors $F = \bigcap_{i=p+1}^{n} H_i$. On obtient bien $n - p$ hyperplans ie. $n - p$ équations. ■

III.2.10 Exemple
On savait qu'une droite dans l'espace est décrite par un système de deux équations, c'est à dire comme l'intersection de deux plans.

III.2.11 Exercice
Trouver un système d'équation de la droite $D = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

III.3 Sommes directes d'espaces vectoriels

III.3.1 Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F_1 \dots F_p$ des sous espaces de E.

1. *La somme des espaces $(F_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ est $\sum_{i=1}^{p} F_i = \{u_1 + \cdots + u_p |\ u_1 \in F_1 \text{ et } u_2 \in F_2 \text{ et } \dots \text{ et } u_p \in F_p\}$. C'est le sous espace de E engendré par les F_i*
2. *On dit que la somme $F = \sum_{i=1}^{p} F_i$ est **directe** et on note $F = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$ ssi tout vecteur $u \in F$ s'écrit de manière **unique** sous la forme $u = u_1 + \cdots + u_p$ avec $\forall i \in [\![1,p]\!] u_i \in F_i$.*

La somme et la somme directe sont associatives, ce qui permet de justifier a posteriori l'utilisation de $\sum$ et $\bigoplus$

III.3.2 Remarque

Le cas $p = 2$ est déjà connu. La somme $F + G$ est directe ssi F et G sont supplémentaires dans $F + G$.

III.3.3 Exercice

Trouver 3 espaces D_1, D_2, D_3 tels que $\mathbb{R}^3 = D_1 \oplus D_2 \oplus D_3$.

III.3.4 Théorème

Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous espaces de E. La somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe ssi $\forall (u_1, \dots, u_n) \in \prod_{i=1}^{p} F_i\ u_1 + \cdots + u_p = 0_E \iff u_1 = u_2 = \cdots = u_p = 0_E$.

Ainsi il suffit de vérifier que le vecteur nul possède une unique écriture sous forme de somme.

Preuve.
Si on suppose la somme directe, alors le vecteur nul s'écrit de manière unique comme $0_E = \underbrace{0_E}_{\in F_1} + \cdots + \underbrace{0_E}_{\in F_p}$.

Réciproquement, supposons que $\forall (u_1, \dots, u_n) \in \prod_{i=1}^{p} F_i\ u_1 + \cdots + u_p = 0_E \iff u_1 = u_2 = \cdots = u_p = 0_E$. Soit $u \in \sum_{i=1}^{p} F_i$. Montrons que sa décomposition en somme est unique.

Si on a $u = \sum_{i=1}^{p} u_i = \sum_{i=1}^{p} u'_i$ avec $\forall i \in [\![1,p]\!] u_i, u'_i \in F_i$ alors $\sum_{i=1}^{p} \underbrace{(u_i - u'_i)}_{\in F_i} = u - u = 0_E$ et donc $u_i - u'_i = 0_E$ pour tout $i \in [\![1,p]\!]$ par hypothèse. ∎

III.3.5 Exemple

Montrer que si $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une base de E alors $E = \bigoplus_{i=1}^{n} \text{Vect}(e_i)$.

Trouver la propriété plus précise que "base" qui permet ce raisonnement.

III.3.6 Définition-Proposition

Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous espaces de E, de dimension finie. Notons $F = \sum_{i=1}^{p} F_i$.

$F = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$ ssi la concaténation de bases des F_i est une base de F.
*Une telle base de F est dite **adaptée** à la somme directe.*

III.3.7 Remarque

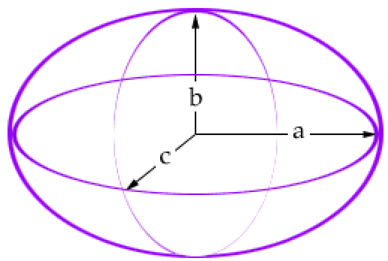
1. Observer le ssi, et surtout la réciproque. Il est facile de décomposer un espace en somme si on en connaît une base. Par exemple $\mathbb{R}_3[X] = \text{Vect}(1) \oplus \text{Vect}(X, X^2) \oplus \text{Vect}(X^3)$.
2. On obtient immédiatement $\dim \left(\bigoplus_{i=1}^{p} F_i \right) = \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$.

III.3.8 5/2

Quels genre de sous-espaces sont forcément en somme directe ?

III.3.9 Une application

Considérons la surface suivante, image d'une sphère par une application linéaire f simple : On a ici 3 droites (2 à 2 orthogonales d'ailleurs) D_a, D_b et D_c telles que sur



chaque droite l'application f est une homothétie de rapport a, b ou c.

Comme $D_a \oplus D_b \oplus D_c = \mathbb{R}^3$, dans une base de $\mathbb{R}^3$ adaptée à cette somme directe, la matrice de f est :

III.4 Projecteurs, symétries

III.4.1 Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soient également F, G deux sev supplémentaires. Tout $x \in E$ s'écrit donc de manière unique comme $x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$. L'application qui à $p : x \mapsto x_F$ est appelé projecteur sur F parallèlement à G (ou de direction G).

L'application qui à $s : x \mapsto x_F - x_G$ est appelé symétrie par rapport à F parallèlement à G (ou de direction G).

III.4.2 Rappels

1. On a les liens important entre ces applications : $s = 2p - Id$ et $p = \frac{s+Id}{2}$.
2. Si p' et s' désignent les projection et symétrie sur G et de direction F, on a $p + p' = Id, p \circ p' = 0 = p' \circ p, s + s' = 0, s \circ s' = s' \circ s = -Id.$.

III.4.3 Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-ev

1. *Soit p le projecteur sur F de direction G. Alors $p \in \mathcal{L}(E)$, $p^2 = p$, $\ker p = G$ et $\operatorname{Im} p = F = \ker(Id_E - p)$.*
2. *Réciproquement si $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $f^2 = f$ alors f est le projecteur sur $\operatorname{Im}(f) = \ker(f - Id)$ dans la direction $\ker(f)$*

Preuve.
On prouve seulement le deuxième point.

— On a d'abord $(f - Id) \circ f = 0$ donc $\operatorname{Im}(f) \subset \ker(f - Id)$. L'autre inclusion est évidente.

— Montrons maintenant que $\ker(f) \oplus \ker(f - Id) = E$. Soit $x \in E$.

  — Analyse : **Supposons** que $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \ker(f)$ et $x_2 \in \ker(f - Id)$.
  Alors $f(x) = 0_E + f(x_2) = x_2$. Ainsi $x_2 = f(x)$ et donc $x_1 = x - x_2 = x - f(x)$.

  — Synthèse : Réciproquement, posons $x_1 = x - f(x)$ et $x_2 = f(x)$. Montrons que $x = x_1 + x_2$ (trivial) et que $x_1 \in \ker(f)$ et $x_2 \in \ker(f - Id)$ (moins trivial).
  Cependant, $f(x_1) = f(x) - f^2(x) = 0_E$ et $(f - Id)(x_2) = f(x_2) - x_2 = f(x_2) - x_2 = f^2(x) - f(x) = 0_E$ car $f^2 = f$.

  Conclusion : $E = \ker(f) + \ker(f - Id)$. Le fait que la somme est directe provient directement de l'analyse (les seules valeurs possibles sont...) ou du fait que si $x \in \ker(f) \cap \ker(f - Id)$ alors $f(x) = 0_E$ et $f(x) - x = 0_E$ donc $x = 0_E$ et on a bien $\ker(f) \cap \ker(f - Id) = \{0_E\}$.

— Par définition d'un projecteur, et d'après notre analyse, f est le projecteur sur $\ker(f - Id) = \operatorname{Im}(f)$ dans la direction $\ker(f)$. ∎

III.4.4 Exemple

Soit la matrice $A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ Montrer que l'endomorphisme canoniquement associé à A est un projecteur dont on précisera les éléments caractéristiques.

Question 5/2 : au vu de la matrice A, que dire de plus de la projection ?

III.4.5 Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-ev

1. *Soit s la symétrie par rapport à F dans la direction G. Alors $s \in GL(E)$ et $s^2 = Id_E$ ie. $s = s^{-1}$. De plus $F = \ker(s - Id_E) = \{x \in E |\ s(x) = x\}$ et $G = \ker(s + Id) = \{x \in E |\ s(x) = -x\}$.*
2. *Réciproquement, soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Si $f^2 = Id_E$ alors f est la symétrie par rapport à $\ker(f - Id_E)$ parallèlement à $\ker(f + Id_E)$ qui sont donc supplémentaires dans E.*

III.4.6 Exemple

Dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'application s qui à une fonction f associe $s(f) : x \mapsto f(-x)$ est une symétrie. C'est la symétrie par rapport aux fonctions paire parallèlement aux fonctions impaires.

III.5 Projection et espaces en somme directe

III.5.1 Définition

Soient $F_1, \dots F_p$ des sous-espaces de E vérifiant $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$. Pour $x \in E$, on pose $x = x_1 + \dots + x_p$ l'unique décomposition en somme telle que $\forall i \in [\![1, p]\!] x_i \in F_i$.

La projection de x sur F_j parallèlement à $\bigoplus_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{p} F_i$ est x_j. Le projecteur associé est $p_j : x \mapsto x_j$.

III.5.2 Remarque

Si la somme directe des F_i n'est pas égale à l'espace E global, on peut se ramener à la définition en considérant plutôt $F = \sum_{i=1}^{p} F_i$ comme espace dans lequel on projette.

III.5.3 Proposition
Avec les notations de la définition précédente, $\forall (k,l) \in [\![1,p]\!]^2\ k \neq l \Rightarrow p_k \circ p_l = 0$ *et* $\sum_{j=1}^{p} p_j = Id_E$.

III.5.4 En pratique

Pour déterminer ces projections, on procède comme dans le cas d'espaces supplémentaires :

1. calcul de coordonnées dans une base adaptée si possible, et on regroupe par espace.
2. analyse/synthèse s'il le faut.

IV Matrices

IV.1 Matrice d'une application linéaires

IV.1.1 Définition
Soient E, F *deux* $\mathbb{K}$*-ev de dimension finie de dimension respectives* p *et* n*. On note* $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ *une base de* E *et* $\mathcal{B}_F = (u_1, \dots, u_n)$ *une base de* F*. Soit également* $f \in \mathcal{L}(E,F)$*. La matrice* A *de* f *dans* $\mathcal{B}_E$ *et* $\mathcal{B}_F$ *(noté* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$*) est la matrice* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(e_1), \dots, f(e_p)) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

C'est la matrice des coordonnées des $f(e_j)$ *dans* $u_1, \dots, u_n$*, écrites en colonnes.*

Si $A = (a_{i,j})_{i\in[\![1,n]\!] j\in[\![1,p]\!]}$ *alors* $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} u_i$.

IV.1.2 Endomorphismes

Dans le cas où $E = F$ et $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_F$, on ne répète pas la base dans la notation.

IV.1.3 Exemple
Trouver la matrice de $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x+y \\ x+2y \end{pmatrix}$ dans la base $(u,v) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

IV.1.4 Base canonique

On note $E_{k,l}$ la matrice de taille n,p nulle partout sauf au coefficient d'indice k,l qui vaut 1. La famille des $(E_{k,l})_{k\in[\![1,n]\!] l\in[\![1,p]\!]}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Dans le cas où $n = p$, $E_{k,l}E_{r,s} = \delta_{l,r}E_{k,s}$ où δ est le symbole de Kronecker (qui vaut 1 si $l = r$ et 0 sinon).

IV.1.5 Théorème
Avec les notations de la définition, $\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F) & \to & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f) \end{array}\right.$ *est un isomorphisme linéaire.*

IV.1.6 Conséquences

1. On obtient $\dim(\mathcal{L}(E,F)) = \dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = \dim(E) \times \dim(F)$
2. On peut ainsi calculer une base de $\mathcal{L}(E,F)$: les applications $f_{k,l}$ dont les matrices sont les $E_{k,l}$

IV.1.7 Produit matriciel et évaluation

Toujours avec les notations de la définition. Soient en plus $x \in E$ et $y \in F$. On note $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x)$ et $y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(y)$, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$.

$$y = f(x) \iff Y = AX$$

Multiplier par A revient à calculer l'image par f (à condition que les bases soient les bonnes).

IV.1.8 Théorème
Soient E, F, G *trois* $\mathbb{K}$*-ev de dimensions respectives* q, p, n *et de bases* $\mathcal{B}_E)$, $\mathcal{B}_F$, $\mathcal{B}_G$*. Soient* $f \in \mathcal{L}(E,F)$ *et* $g \in \mathcal{L}(F,G)$.

On pose de plus $M_f = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ *et* $M_g = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G}(g) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Alors $C = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_G}(g \circ f) = M_g M_f \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$

Rappel : si $C = AB$, $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$.

IV.1.9 Corollaire
f est bijective ssi M_f est inversible et dans ce cas $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f^{-1}) = M_f^{-1}$.

IV.1.10 Puissances

Si $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ est une base de E, notons $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^k) = M^k$ pour tout k où cela à du sens (y compris négatif dans le cas où f est bijective)

IV.1.11 Rang

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$

1. $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(\mathrm{Mat}(f))$, et ce quelques soient les bases choisies.
2. f est injective ssi $\mathrm{rg}(f) = \dim(E)$.
3. f est surjective ssi $\mathrm{rg}(f) = \dim(F)$.

IV.2 Matrices semblables

IV.2.1 Définition
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E. On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ *de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$.*

*On exprime la **nouvelle base** $\mathcal{B}'$ en fonction de l'**ancienne base***

IV.2.2 Remarque

Une matrice de passage est toujours inversible et la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ est P^{-1}.

IV.2.3 Théorème
Soit E un $\mathbb{K} - ev$ de dimension n et $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E. Soit également $x \in E$.

On pose $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$, $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $X' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$. Alors

$$X = PX'$$

IV.2.4 Théorème
Soient E un $\mathbb{K}$-ev $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E. On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $M' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$. Alors $M' = P^{-1}MP$

Preuve.
Pour $x \in E$ on pose $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(X)$ et $X' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$. On a alors $X = PX'$.

De plus $MX = PM'X'$ (en posant $MX = Y \in \mathbb{K}^n$ on a bien $Y = PY'$) et ainsi $MPX' = PM'X'$ ou encore $P^{-1}MPX' = M'X'$ pour tout $X' \in \mathbb{K}^p$ (car on a pris x quelconque)

Finalement $M' = P^{-1}MP$ ∎

IV.2.5 Remarque

De manière plus générale, si on dispose d'une matrice de passage Q dans l'espace d'arrivée, on a $M' = Q^{-1}MP$.

IV.2.6 Définition
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est semblable à B ssi il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = P^{-1}BP$.

A et B représentent un même endomorphisme dans deux bases différentes.

IV.2.7 Exercice
Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer :

- *A est semblable à A.*
- *A est semblable à B ssi B est semblable à A. (on dira A et B sont semblables)*
- *Si A et B sont semblables et B et C sont semblables alors A et C sont semblables.*

La relation "être semblable" est qualifiée de relation d'équivalence.

IV.2.8 Remarque

1. Deux matrices semblables ont le même rang.
2. La seule matrice semblable à I_n est elle même.

IV.3 Espaces stables

IV.3.1 Définition
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace de E. On dit que F est stable par f ssi $f(F) \subset F$.

IV.3.2 Exemple
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer que $F = \ker(f - \lambda id_E)$ est stable par f.

IV.3.3 Restriction

Si F est stable par f alors on peut définir $f_F : \left\{ \begin{array}{ccc} F & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$ la restriction de f à F (le détail important ici est l'espace de départ qui est illégal si F n'est pas stable).

Alors $f_F \in \mathcal{L}(F)$.

IV.3.4 Exemple
Considérons l'application $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x+y+z \\ x-y+z \\ x+y-z \end{pmatrix}$. On pose $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $F = \mathrm{Vect}(u, v)$ et $G = \mathrm{Vect}(w)$.

Montrer que F, G sont stables par f, calculer $\mathrm{Mat}_{(u,v)}(f_F), \mathrm{Mat}_{(v)}(f_G)$ et $\mathrm{Mat}_{(u,v,w)}(f)$.

IV.3.5 Familles génératrices

Soit $F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$. F est stable par f ssi $\forall j \in [\![1, p]\!] f(e_j) \in F$. En effet $f(F) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_p))$.

IV.3.6 Théorème
Soit F un sous-espace de E, $\mathcal{B}_F$ une base de F que l'on complète en une base $\mathcal{B}$ de E.

On pose $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f)$. F est stable par f ssi $\mathrm{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où $0, B, C$ sont des matrices.

Preuve.
On note $M = (m_{i,j}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Supposons F stable par f et notons $p = \dim(F)$, $\mathcal{B} = e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ (les p premiers sont dans F). Pour $j \in [\![1, p]\!]$, on a $f(e_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_{ij} e_i$. Les derniers termes de cette somme sont nuls car $e_j \in F$, ainsi $f(e_j) = \sum\limits_{i=1}^{p} m_{ij} e_i$. Ceci prouve que les n - p dernières lignes de M sont nulles dans les p premières colonnes.

Réciproquement, si M est de la forme annoncée, alors $f(e_j)$ n'a des coordonnées que sur $e_1, \ldots, e_p$ ie est dans F, et ce pour tout $j \in [\![1, p]\!]$. ■

IV.3.7 Exercice
Dans le théorème précédent, on note $p = \dim(F)$. Donner les tailles des matrices B et C.