Révisions

Exercice 1

1. Trouver une base de $P : x - 2y + z = 0$.
2. Donner un système d'équation de la droite $D = \text{Vect}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

On pose $u = (-1, 1, 0), v = (2, 0, 1), w = (1, 1, 1)$. Donner une base, la dimension et un supplémentaire de $F = \text{Vect}(u, v, w)$.

Exercice 3

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P - (1 - X)P' \end{cases}$. Montrer que f est linéaire et donner des bases de $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$.

Exercice 4

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. On suppose $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont stables par g.

Manipulations d'espaces

Exercice 5

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Montrer : $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 6

Vrai ou Faux ?

Soit E un $\mathbb{R}$-e.v. (non nécessairement de dimension finie), et f et g deux endomorphismes de E.

1. $f \circ f = 0 \Leftrightarrow f = 0$.
2. $\text{Im}\,(g \circ f) \subset \text{Im} g$.
3. $\text{Im} g \subset \text{Im}\,(g \circ f)$.
4. $\ker\,(g \circ f) \subset \ker f$.
5. $\ker f \subset \ker\,(g \circ f)$.
6. $\text{Im}\, f \subset \ker f \Leftrightarrow f^2 = 0$.
7. $\text{Im}\, f \cap \ker f = f(\ker f^2)$.
8. Si f est injective, alors f est bijective.
9. $f(\ker(g \circ f)) = \ker g \cap \text{Im}\, f$.

Familles libres et génératrices

Exercice 7

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme non nul de E (espace de dimension n). On suppose qu'il existe p tel que $f^p = 0$ et on prend p le plus petit possible.

1. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ est libre.
2. Montrer que $f^n = 0$.

Exercice 8

1. Montrer que pour $(k, n) \in \mathbb{Z}^2$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{ikt} e^{-int} \mathrm{d}t = \begin{cases} 2\pi \text{ si } k = n \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$
2. Pour $k \in \mathbb{Z}$, on définit une fonction f_k de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ en posant $f_k(t) = e^{ikt}$, $t \in \mathbb{R}$. Soit $p < n$ dans $\mathbb{Z}$, montrer que $(f_p, \cdots, f_n)$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $c_k(t) = \cos kt$ et $s_k(t) = \sin kt$, $t \in \mathbb{R}$. Déduire de la question précédente que $(c_1, \cdots, c_n, s_1, \cdots, s_n)$ forme une famille libre.

Exercice 9

Soient E, F deux espaces vectoriels et $f : E \to F$ linéaire

On suppose qu'il existe une famille génératrice de E.

1. Montrer que f est injective si et seulement si f transforme toute famille libre de E en une famille libre de F
2. Montrer que f est surjective si et seulement s'il existe une famille génératrice de E transformée par f en une famille génératrice de F

Exercice 10

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit $u \in \mathcal{L}\,(E)$ telle que

$$\text{pour tout } x \in E \text{ , } (x, u\,(x)) \text{ est une famille liée.}$$

Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E.

1. Montrer qu'il existe $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$ tels que $u(e_i) = \lambda_i e_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
2. En considérant $e_i + e_j$, montrer que $\lambda_i = \lambda_j$ pour $i \neq j$.
3. Donner l'ensemble des endomorphismes u vérifiant la propriété de l'énoncé.
4. Quels sont les matrices $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les autres matrices ?

Sommes directes

Exercice 11

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie $n \geq 1$, et F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E de même dimension.

Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel G de E tel que : $E = F_1 \oplus G = F_2 \oplus G$

Exercice 12
Soient E, F 2 $\mathbb{K}$-ev. Soient de plus $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,E)$ telles que $u \circ v = Id_F$. Montrer que $v \circ u$ est un projecteur et préciser ses éléments caractéristiques.

Exercice 13
Soit E un espace vectoriel de dimension finie. et $f \in \mathcal{L}(E)$. On note $F_1 = \ker(f)$, $F_2 = \ker(f - Id_E)$, $F_3 = \ker(f - 2Id_E)$.

1. Montrer que l'on a la somme directe $F_1 \oplus F_1 \oplus F_3$
2. On suppose maintenant que $f^3 - 3f^2 - 2f = 0$. Montrer que $E = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$.
3. En notant p_i la dimension de F_i, donner la matrice de f dans une base adaptée à la somme précédente.

Matrices

Exercice 14
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que $\mathcal{B} = (u, v) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et calculer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
Calculer rapidement $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 15
Montrer que les matrices $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables.

Exercice 16
Soit $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont donnés par $a_{i,j} = \binom{j-1}{i-1}$ et $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n)$ l'application canoniquement associée à A.

1. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\varphi(P)$.
2. En déduire les coefficients de A^k pour $k \in \mathbb{N}$.
3. Même question avec $k = -1$ (que faut-il prouver avant ?) puis $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 17
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = A$.

1. Calculer A^2. Qu'en déduire pour f ?
2. Donner une base de $\ker(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$ puis la matrice de f dans une base adaptée à $\mathrm{Im}(f) \oplus \ker(f) = E$.