Techniques de calculs

Antoine Louatron

Table des matières

I Opérations sur les nombres

I.1 Propriétés des opérations

I.1.1 Proposition
On se place dans $\mathbb{C}$. L'addition et la multiplication sont associatives, commutatives et possèdent un neutre : soient $a, b, c \in \mathbb{C}$

- *associative :* $a + (b + c) = (a + b) + c$ *et* $a(bc) = (ab)c$
- *commutative :* $a + b = b + a$, $ab = ba$
- *neutre* $a + 0 = a$, $a \times 1 = a$.

De plus, la multiplication est distributive par rapport à l'addition :

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c.$$

I.1.2 Conséquence
On peut sommer ou multiplier un nombre quelconque fini de réels sans préciser l'ordre des opérations.

I.1.3 $\mathbb{C}$ est intègre
Soient $a, b \in \mathbb{C}$. On a $ab = 0 \iff a = 0$ ou $b = 0$.
On utilise cette propriété principalement pour résoudre des équations que l'on a au préalable factorisé.

I.2 Sommes

I.2.1 Notation
Pour des réels ou complexes $a_1, \dots, a_n$ on note $a_1 + a_1 + \dots + a_n$ sous la forme $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.

Evidemment, on peut choisir des indices qui ne commencent pas à 1. Par convention, si l'ensemble d'indice est vide (par exemple l'indice d'arrivé est strictement inférieur à l'indice de départ), la somme vaut 0.

I.2.2 Proposition

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Preuve.
Idée : compter dans un sens puis dans l'autre.
preuve "propre" : changement d'indice : $\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} (n + 1 - k)$ + regroupement des termes. ■

I.2.3 Proposition
Soient $a_1, \dots, a_n, b_1 \dots b_n$ des nombres, λ un nombre.

1. $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda = n\lambda$.
2. $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$
3. $\sum\limits_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k + \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$
4. $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \dots$

5. *On peut réordonner les termes d'une somme sans changer sa valeur. Par exemple* $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_{n-k+1}$.

Les propriétés 2 et 3 traduisent la linéarité du symbole $\sum$.

Preuve.
Ce sont des traductions de propriétés de $+$. Trouver lesquelles. ∎

I.2.4 Exemple
Calculons $S_2 = \sum_{k=1}^{n} k^2$ en considérant la somme $\sum_{k=1}^{n} ((k+1)^3 - k^3)$ calculée de deux manières différentes.

Calculer $S_3 = \sum_{k=1}^{n} k^3$ avec la même technique.

I.2.5 Sommes télescopiques

On a, avec les notations habituelles, $\sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1$.

I.2.6 Théorème
Soient $a, b \in \mathbb{C}$ *et* $n \in \mathbb{N}$. *On a*

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1}$$

Preuve.
Le cas $n = 0$ est un cas dégénéré donnant $0 = 0$. Les autres cas ses traitent par calcul direct et somme télescopique. ∎

I.2.7 Exemple
Ecrire la formule pour $n = 2, 3$. Ecrire la formule quand $b = 1$. Adapter à une différence dans le cas n impair.

I.2.8 Corollaire
Pour $q \neq 1$ *un nombre, on a*

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

I.2.9 Exemple
Calculer la somme des n premiers termes de a suite $u_0 = 7$ et $u_{n+1} = 2u_n$.

Même question avec les termes d'indices 5 à 42.

I.2.10 Sommes doubles

Soient $(a_{i,j})_{i \in [\![1,n]\!], j \in [\![1,m]\!]}$ des nombres (on a noté $[\![1,n]\!]$ l'ensemble des entiers entre 1 et n). Ces nombres sont traditionnellement notés sous forme de tableau où i est l'indice de ligne et j l'indice de colonne.

Par définition

$$\sum_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ j \in [\![1,m]\!]}} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \right)$$

I.2.11 Exemple
Calculer $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} ij$.

I.2.12 Sommes triangulaires

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j} a_{i,j} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} \right) \underset{\text{def}}{=} \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_{i,j}$$

I.2.13 Exemple
Calculons

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \sum_{i=1}^{j} i = \sum_{j=1}^{n} \frac{j+1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{n(n+1)}{2} + n \right) = \frac{n(n+3)}{4}$$

I.3 Produits

I.3.1 Notation

Soient $a_1, \ldots, a_n$ des nombres. On note $a_1 \times \cdots \times a_n$ sous la forme $\prod\limits_{k=1}^{n} a_k$.

Les changements d'indice dans les produits suivent les mêmes règles que pour les sommes (techniquement, le changement doit être bijectif pour pouvoir exprimer j en fonction de k et k en fonction de j).

Explication Comme pour les sommes, le nom de l'indice ne change pas la valeur du produit. Il sert juste à numéroter les nombres que l'on multiplie.

I.3.2 Proposition
Soient $a_1, \ldots, a_n, b_1 \ldots b_n$ des nombres, λ un nombre.

1. $\prod\limits_{k=1}^{n} \lambda a_k = \lambda^n \prod\limits_{k=1}^{n} a_k$
2. $\prod\limits_{k=1}^{n} (a_k \times b_k) = \prod\limits_{k=1}^{n} a_k \times \prod\limits_{k=1}^{n} b_k$

I.3.3 Produit télescopique

Cette fois la propriété s'écrit

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_1}$$

Il faut évidemment que les nombres a_k soient tous non nuls.

I.3.4 Exemple
Calculer $\prod\limits_{k=1}^{n} (1 + \frac{1}{k})$.

Même chose avec un $-$.

I.3.5 Transformer un produit en somme

On pourra penser à appliquer ln ou exp pour transformer l'un en l'autre.

$$\ln(\prod_{k=1}^{n} a_k) = \sum_{k=1}^{n} \ln(a_k) \text{ et } \exp(\sum_{k=1}^{n} b_k) = \prod_{k=1}^{n} e^{b_k}$$

pour $b_k \in \mathbb{R}$ et $a_k > 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

I.3.6 Définition
Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle factorielle de n et on note $n!$ le nombre $\prod_{k=1}^{n} k$.

La convention est bien évidemment qu'un produit avec un ensemble d'indice vide vaut 1, c'est à dire que $0! = 1$.

I.3.7 Exemple
Simplifier le produit $\prod\limits_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}$.

II Coefficients binomiaux

II.1 Triangle de Pascal

II.1.1 Définition
Soient $n, p \in \mathbb{N}$. On définit le coefficient binomial p parmi n par :

$$\binom{n}{p} = \begin{cases} 0 & \text{si } p > n \\ \frac{n!}{p!(n-p)} & \text{sinon} \end{cases}$$

II.1.2 Remarque

Calculer $\binom{n}{0}$ et $\binom{n}{n}$. On remarque que dans le cas général (non nul) $\binom{n}{p}$ est un produit de p termes divisé par un produit de p termes.

II.1.3 Proposition
Soient $n, p \in \mathbb{N}$ avec $p \neq n$.

1. $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$
2. $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$
3. $\binom{n}{p}$ *est un entier naturel.*

Preuve.

1. Evident grâce à la formule de définition.
2. La proposition est évidente quand $p = n$. Si $p < n$ alors

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \frac{n!}{p!(n-p)} + \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)} = \frac{n!}{p!(n-p-1)}\left(\frac{1}{n-p} + \frac{1}{p+1}\right)$$

   et il suffit de mettre au même dénominateur le second terme pour voir que les factorielles se complètent pour donner la formule voulue.

3. On pose la propriété P_n : $\forall p \in \mathbb{N} \binom{n}{p} \in \mathbb{N}$.

   — P_0 est clairement vraie (distinguer deux cas suivant que $p = 0$ ou non).

   — Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose $\forall p \in \mathbb{N} \binom{n}{p} \in \mathbb{N}$.
   Alors $\binom{n+1}{0} = 1$ d'après la remarque précédente. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $p > 0$, alors $\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p-1} + \binom{n}{p}$ d'après le point précédent. Il s'agit d'une somme d'entier naturel, donc $\binom{n+1}{p} \in \mathbb{N}$.

   — Conclusion : pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{p} \in \mathbb{N}$. ∎

II.1.4 Triangle de Pascal

Construire les premières lignes. Remarquer la symétrie par rapport au milieu de chaque ligne qui est conséquence de la propriété 1 du point précédent.

II.2 Binôme de Newton

II.2.1 Théorème (Binôme de Newton)
Soient $a, b \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Preuve.
On prouve ce théorème par récurrence.

— Propriété : Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $P_n =$ "$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$".

— Initialisation : $(a+b)^0 = 1$ (si $a + b \neq 0$) et la somme est alors $\binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$.

— Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété P_n est vraie. On a alors

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b)\times(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n+1-k} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n+1-k} \\ &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^kb^{n-(k-1)} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n+1-k} \\ &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k})a^kb^{n-(k-1)} \\ &= b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^kb^{n+1-k} + a^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^kb^{n+1-k}\end{aligned}$$

L'hérédité est donc prouvée.

— Conclusion : Par récurrence on a donc prouvé que $\forall n \in \mathbb{N}\ (a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$. ■

II.2.2 Exemple

Appliquer avec $n = 2, 3, 4$.

Calculer 19^2

II.2.3 Application au calcul de sommes

1. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$ pour tout $n > 0$.

III Inégalités dans $\mathbb{R}$

III.1 Propriétés des nombres réels

III.1.1 Proposition

1. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$. $a \leqslant b \iff -b \leqslant -a$.*
2. *Compatibilité avec l'addition : soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \leqslant b \Rightarrow a + c \leqslant b + c$ et $a \leqslant b$ et $c \leqslant d \Rightarrow a + c \leqslant b + d$.*
   Si l'une des deux inégalités est stricte, alors l'inégalité obtenue l'est aussi.
3. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$. Si $c \geqslant 0$ alors $ac \leqslant bc$.*
   Si $c > 0$ la multiplication par c conserve les inégalités strictes.
4. *On ne peut inverser les inégalités qu'entre nombres de même signe. Plus précisément, si $0 < a \leqslant b$ alors $0 < \frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{a}$ et on peut changer les inégalités larges en inégalités strictes. On utilise le point 1. pour le cas des nombres strictement négatifs.*

III.1.2 Somme d'inégalités

Si $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ pour $k \in [\![1, n]\!]$ et que l'on a $a_k \leqslant b_k$ pour tout k alors

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} b_k$$

On peut toujours sommer des inégalités.

III.1.3 Exemple

Soit $n \in \mathbb{N}$ Montrer que $\sum_2^n \frac{1}{k^2} \leqslant 1$ en remarquant que $\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)}$ pour tout $k \geqslant 2$.

III.1.4 Définition

Soit $x \in \mathbb{R}$. La valeur absolue de x est $|x| = max(x, -x) = \begin{cases} x & si\ x \geqslant 0 \\ -x\ si\ x \leqslant 0 \end{cases}$.

III.1.5 Remarque

Pour tout réel x on a $|x| = |-x|$.

III.1.6 Distance entre deux réels

Si $a, b \in \mathbb{R}$, la distance entre a et b est le nombre positif $|a-b| = |b-a|$

III.1.7 Interprétation graphique

Considérons $\varepsilon > 0$ et $a, x \in \mathbb{R}$. Donner l'interprétation graphique de $|x-a| \leqslant \varepsilon$. Traduire ce fait par $x \in$ un intervalle.

III.2 Prouver une inégalité

III.2.1 Exemple

Par calcul direct et applications des propriétés. On part de l'inégalité à montrer et on arrive par équivalence à une inégalité que l'on sait vraie.

Montrons que pour tout $a, b \in \mathbb{R}^+$ on a $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$.

III.2.2 M-remarque

Soient $a, x \in \mathbb{R}$. Pour prouver $|x| \leqslant a$ il suffit de prouver que $x \leqslant a$ et $-x \leqslant a$.

III.2.3 Théorème (Inégalité triangulaire)
Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Alors $|x+y| \leqslant |x| + |y|$.

On en déduit $||x| - |y|| \leqslant |x-y|$ et $||x| - |y|| \leqslant |x+y|$.

Preuve.

- Il suffit de distinguer les cas suivant les signes de x et y et leurs positions relatives. Voir le cours sur les complexes pour une preuve plus générale.
- On a $x = x - y + y$ et donc $|x| \leqslant |x-y| + |y|$ ou encore $|x| - |y| \leqslant |x-y|$.
  Comme $|x-y| = |y-x|$ on en déduit $|y| - |x| \leqslant |x-y|$. D'après la remarque précédente on obtient
  $$||x| - |y|| \leqslant |x-y|$$
  Pour prouver l'autre inégalité, on se souvient du fait que $|-y| = |y|$ et
  $$|x+y| = |x-(-y)| \geqslant ||x| - |-y||$$
  ∎

III.2.4 Etude de fonction

Pour prouver une inégalité faisant intervenir un seul réel, on peut tenter de trouver le signe d'une fonction par une étude de ses variations.

III.2.5 Exemple

Montrer que $\forall x > -1 \ \ln(1+x) \leqslant x$.

Montrer que $-\ln(u) \geqslant 1 - u$ pour tout $u > 0$. En appliquant à $u = \frac{t}{t+1} > 0$, retrouver les variations de $(1 + \frac{1}{x})^x$ (cf TD1).