

Le cadre d'étude est le suivant : on considère des fonctions  $f$  continues sur un segment  $[a, b]$ .  $I$  désigne un intervalle non vide et non réduit à un point

## II Théorème fondamental et conséquences

### I Propriétés de l'intégrale

#### Interprétation graphique

Si  $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$  alors  $\int_a^b f(t)dt$  représente

#### Théorème 1

Soient  $f, g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ . On a donc  $a \leq b$ .

1. Linéarité :

En d'autres termes  $\varphi : f \mapsto \int_a^b f$  est une forme linéaire sur  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ .

2. Croissance :

3. Inégalité triangulaire :

#### Exercice 1

Soient  $f, g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$  et  $M = \sup_{[a, b]} |f|$ . Montrer que  $\int_a^b |fg| \leq M \int_a^b |g|$ .

#### Théorème 2 (Relation de Chasles)

#### Exercice 2

Calculer  $\int_0^{2\pi} |\cos(t)|dt$ .

#### Intégrer entre deux bornes

Si on a  $a > b$ , par définition  $\int_a^b f(t)dt =$

#### Théorème 3 (Théorème fondamental)

Soit  $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ . La fonction  $f$  est donc continue sur un intervalle.

1. Soit  $x_0 \in I$  fixé. Alors  $\int_{x_0}^x f(t)dt$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ .

2. Si  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$  et  $a, b \in I$  alors  $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$ .

3. Si  $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{K})$  alors  $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt$ .

#### Exercice 3

Prouver l'inégalité des accroissements finis dans le cas où  $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ .

#### Exercice 4

Calculer les intégrales suivantes :

1.  $\int_1^2 \frac{1}{t\sqrt{t}} dt$

4.  $\int_0^1 \frac{t^2-1}{t^2+1} dt$

2.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2u + \frac{\pi}{4}) du$

5.  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

3.  $\int_0^\pi e^{4it} dt$

6.  $\int_0^1 e^{-x} \cos(2x) dx$

#### Exercice 5

Tracer la courbe représentative de  $\varphi : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$  en admettant que  $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

#### Théorème 4

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et  $\int_a^b f(t)dt = 0$ .

$$\int_a^b f = 0 \Rightarrow \forall t \in [a, b] f(t) = 0$$

#### Exercice 6

Soit  $P \in \mathbb{K}_n[X]$ . Montrer que  $\forall Q \in \mathbb{K}_n[X] \int_0^1 P(t)Q(t) = 0 \iff P$  est le polynôme nul.

**Théorème 5 (Intégration par parties)****Exercice 7**

Trouver une primitive de  $\ln$  sur  $]0, +\infty[$

**Exercice 8**

Calculer  $\int x^2 e^x dx$ .

**Exercice 9**

Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $F_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n} dx$ . Calculer  $F_1(x)$  puis trouver une relation entre  $F_n$  et  $F_{n+1}$ .

**Exercice 10**

Pour  $n \in \mathbb{N}$  on pose  $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt$ . Calculer  $W_0, W_1$  puis trouver une relation de récurrence pour la suite  $(W_n)$ .

En déduire  $W_n$  en fonction de  $n$ .

**Théorème 6 (Formule de Taylor avec reste intégral)**

Soit  $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$ ,  $a, b \in I$ . Alors

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

**Théorème 7 (Changement de variable)****Exercice 11**

Calculer  $\int_{-1}^1 (\operatorname{sh}(t) \cos(\ln(1+t^2))) dt$ .

**Exercice 12**

Montrer que  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2$  et en déduire la valeur de ces intégrales.

**Exercice 13**

Calculer :

1.  $\int \frac{t^3+2t^2+4t}{t^2+2t+2} dt$
2.  $\int_0^3 \frac{1}{t^2-2t+5} dt$
3.  $\int \frac{1}{x^2-1} dx$

**III Sommes de Riemann****III.0.1 Théorème**

Soit  $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ .

On appelle somme de Riemann associée à  $f$  les sommes

$$Rg_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \text{ et } Rd_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right).$$

Alors les suites  $(Rg_n)_n$  et  $(Rd_n)$  convergent vers

**Interprétation graphique****Exercice 14**

1. Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right) \right)^{\frac{1}{n}}$

2. Déterminer un équivalent simple de  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+2k}$

3. Déterminer un équivalent de  $S_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{k}$