Devoir surveillé n°2

Durée : 4H. Calculatrices interdites. **Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction et la propreté : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.**

Lisez l'énoncé attentivement et en entier **AVANT** de commencer chaque exercice.

Exercice 1

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Etudier les branches infinies en 0 et $+\infty$ de $f : t \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{t} + t^2 \\ 2t^2 + 1 \end{pmatrix}$.
2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que $f : t \mapsto \frac{at+bt^2}{\sin(\frac{t}{2})}$ est prolongeable en une fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $[-\pi, \pi]$.
3. (a) Pour des valeurs de x à préciser, calculer $\cos(2\arcsin(x))$.
   (b) On note pour $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $P_n(x) = \cos(2^n \arcsin(x))$.
   Montrer que P_n est une fonction polynomiale dont on précisera le degré d_n. On donnera également une relation liant c_n et c_{n+1} les coefficients dominants de P_n et P_{n+1}.
   (c) Montrer que $\forall n > 1$ $c_n > 0$ puis exprimer $u_n = \log_2(c_n) = \frac{\ln(c_n)}{\ln(2)}$ en fonction de n et enfin c_n en fonction de n.

Exercice 2

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'application linéaire canoniquement associée à $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Calculer des bases de $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
2. Donner une équation de $\mathrm{Im}(f)$. Que remarquez-vous sur $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$?
3. Montrer que $\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$.
4. On note $\mathcal{B} = (u, v, w)$ une base de $\mathbb{R}^3$ adaptée à la somme directe de la question précédente. Calculer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
5. Montrer que f est un projecteur dont on précisera les éléments géométriques.

Exercice 3

Partie I

On considère la fonction $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \sqrt{\sin(2t)} \end{array} \right.$

1. Quelles est la période de φ ?
2. Déterminer le domaine de définition D de φ.
3. Donner un tableau de variations de φ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
   Note : vérifiez vos calculs.
4. Tracer la courbe représentative de φ sur $D \cap [0, 2\pi]$.
5. Montrer que φ réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{4}]$ dans un intervalle J à préciser. On note $g : J \to [0, \frac{\pi}{4}]$.
6. Pour $y \in J$, préciser la valeur de $g(y)$.
7. Etudier la dérivabilité et calculer la dérivée de g par deux méthodes.

Partie II

On définit la courbe paramétrée f par $f : t \mapsto \begin{pmatrix} \varphi(t)\cos(t) \\ \varphi(t)\sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il suffit d'étudier f sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ puis d'effectuer une symétrie d'axe $\mathcal{D} : y = x$ puis une symétrie centrale de centre O pour obtenir le support complet de f.
2. Etudier les variations des fonctions x et y sur $[0, \frac{\pi}{4}]$.
3. Préciser les éventuelles tangentes horizontales ou verticales.
4. Donner un vecteur directeur puis une équation de la tangente au point de paramètre $\frac{\pi}{4}$
5. Déterminer la pente de la tangente au point de paramètre $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$ lorsque cela a du sens.
6. Calculer $\ell = \lim\limits_{t \to 0} \frac{y'(t)}{x'(t)}$. On admet que f possède une tangente en 0 de pente ℓ.
7. Tracer le support de f. On donne $x(\frac{\pi}{6}) \approx 0.8, y(\frac{\pi}{6}) \approx 0.5$ et $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7$.
   Choisir l'échelle en conséquence...

Partie III

Dans cette partie, on effectue une étude métrique de la courbe f. Pour $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on note $(\overrightarrow{T}(t), \overrightarrow{N}(t))$ la base de Frenet au point de paramètre t.

1. Montrer que $\|f'(t)\| = \frac{1}{\sqrt{\sin(2t)}}$ et $\overrightarrow{T}(t) = \begin{pmatrix} \cos(3t) \\ \sin(3t) \end{pmatrix}$.
2. Calculer la courbure $\gamma(t)$ au point de paramètre t.
3. En déduire une paramétrisation de la courbe développée de f sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.
4. Obtenir une paramétrisation de la courbe développée par une autre méthode.
5. On démontre (formule de Stokes en physique) que l'aire d'une boucle de courbe est donnée par $\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))\mathrm{d}t$.

   Calculer cette aire.

Exercice 4

Soit n entier naturel, $n \geq 2$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

On dit qu'un endomorphisme non nul u de E est *nilpotent* s'il existe un entier k tel que u^k soit l'endomorphisme nul.

Si u est un endomorphisme de E nilpotent, on appelle *ordre de nilpotence* de u l'entier $r \geq 1$ tel que u^r soit l'endomorphisme nul et u^{r-1} ne soit pas nul.

Une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *nilpotente* si l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ qui lui est canoniquement associé l'est.

Un sous-espace vectoriel F de E est dit *stable* par l'endomorphisme u si $u(F) \subset F$.

Partie I

Les questions de cette partie sont indépendantes.

1. Soit u un endomorphisme de E non nul. Montrer que u est nilpotent d'indice de nilpotence 2 si et seulement si $\mathrm{Im}\, u \subset \ker u$.
2. On suppose dans cette question que $n = 2$. Soient $\mathcal{B}$ une base de E, f et g les endomorphismes de E de matrices respectives dans $\mathcal{B}$:
$$A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   (a) Montrer que f et g sont nilpotents et déterminer leur indice de nilpotence.
   (b) Soit $m \in \mathbb{N}$, déterminer l'expression de $(A + B)^m$. On distinguera les cas m pairs, des cas m impairs.
   (c) L'endomorphisme $f + g$ est-il nilpotent ?
   (d) L'endomorphisme $f \circ g$ est-il nilpotent ?
3. On suppose maintenant que n est un entier quelconque non nul. Soit f et g deux **nouveaux** endomorphismes nilpotents de E d'indice de nilpotence respectif p et q.
   On suppose que les endomorphismes f et g **commutent** : $f \circ g = g \circ f$.
   (a) Montrer que $f \circ g$ est nilpotent, d'indice de nilpotence r
   avec $r \leq \min(p, q)$.
   (b) Montrer que $f + g$ est nilpotent d'indice de nilpotence $k \leq p + q$.

Partie II

Dans cette partie, on désigne par u un endomorphisme non nul de E, nilpotent, d'indice de nilpotence $r \geq 1$.

1. Montrer que u n'est pas inversible.
2. Justifier l'existence d'un vecteur $x \in E$ tel que $u^{r-1}(x) \neq 0$.
3. Montrer que la famille $(x, u(x), u^2(x), \cdots, u^{r-1}(x))$ est une famille libre de E.
   En déduire que $r \leq n$.
4. On note F l'espace vectoriel engendré par la famille $(x, u(x), u^2(x), \cdots, u^{r-1}(x))$:
$$F = \mathrm{Vect}\,(x, u(x), u^2(x), \cdots, u^{r-1}(x))$$
   (a) Quelle est la dimension de F ?
   (b) Montrer que F est stable par u.

(c) On définit alors l'endomorphisme v de F, restriction de u à F :

$$v : \left\{ \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ t & \longmapsto & u(t). \end{array} \right.$$

Vérifier que v est nilpotent, d'indice de nilpotence r. Puis déterminer une base $\mathcal{B}$ de F dans laquelle la matrice de v est :

$$M_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

(d) Quel est le rang de v ?
Déterminer une base de $\ker v$, puis de $\mathrm{Im}\ v$. En déduire que $\ker v \subset \mathrm{Im}\ v$.

5. On suppose dans cette question que $n = 3$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E et soit u l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$