Trigonométries

Antoine Louatron

Table des matières

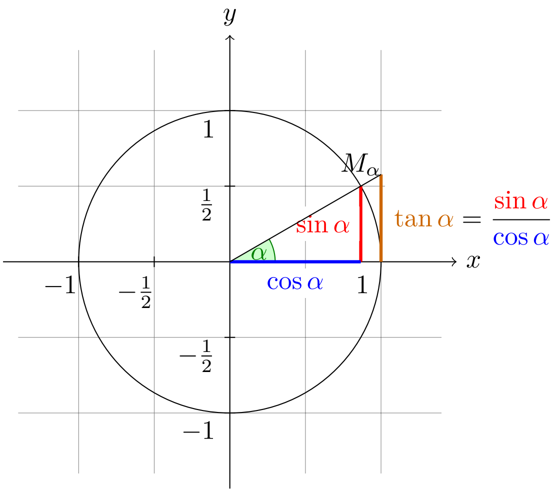

FIGURE 1 – Cercle trigonométrique

I Trigonométrie circulaire

I.1 Sinus et cosinus

I.1.1 Définition

Soit $\alpha \in [0, 2\pi[$. On note M_α le point d'intersection du cercle unité avec la droite qui fait un angle α avec $\imath$ (c'est à dire que l'arc de cercle OM_α mesure α). On pose alors $M_\alpha = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ dans le repère $(O, \imath, \jmath)$. Soit encore

$$\cos\alpha = \overrightarrow{OM_\alpha}.\vec{\imath},\ \sin\alpha = \overrightarrow{OM_\alpha}.\vec{\jmath}.$$

On définit ainsi deux fonctions sur $[0, 2\pi[$ que l'on étend par périodicité sur $\mathbb{R}$.

De plus, quand $\cos\alpha \neq 0$, on pose $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

I.1.2 Conséquences des symétries

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\cos(-x) = \cos(x),\ \sin(-x) = -\sin(x)$$

$$\cos(x+\pi) = -\cos(x),\ \cos(\pi - x) = -\cos(x)$$

$$\sin(x+\pi) = -\sin(x),\ \sin(\pi - x) = \sin(x)$$

$$\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x,\ \cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x$$

$$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x,\ \sin(x - \frac{\pi}{2}) = -\cos x$$

qui sont les conséquences de la symétrie du cercle par rapport à (Ox) $(-x)$, par rapport à (Oy) $(\pi - x)$ et par rapport à O $(\pi + x)$.

Pour les autres formules, il suffit de remarquer qu'une rotation d'un quart de cercle change l'axe (Ox) en (Oy) et l'axe (Oy) en $-(Ox)$.

I.1.3 Proposition (Formules trigonométriques)
Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1$$

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a \sin b,\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a,\ \sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

Preuve.
La première formule est une conséquence directe de la définition et du théorème de Pythagore.

On remarque que $a-b$ est l'angle entre OM_a et OM_b, il suffit pour obtenir son cosinus de calculer le produit scalaire $\vec{OM_a}.\vec{OM_b}$ (pour le voir, pencher la tête pour mettre le plus petit des deux angles à l'horizontale et on se retrouve dans la situation de la définition).

$$\cos(a-b) = \vec{OM_a}.\vec{OM_b} = \begin{pmatrix}\cos a\\ \sin a\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\cos b\\ \sin b\end{pmatrix} = \cos a\cos b + \sin a\sin b.$$

On déduit le sinus de $a-b$ par la formule $\cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$:

$$\sin(a-b) = -(\cos(a+\frac{\pi}{2}-b)) = -(\cos(a+\frac{\pi}{2})\cos b + \sin(a+\frac{\pi}{2})\sin b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b.$$

On peut également calculer la projection orthogonale de M_a sur la droite (OM_b). Posons H le projeté orthogonal de M_a sur (OM_b). Alors $\overrightarrow{OH} = \cos(a-b)\overrightarrow{OM_a}$ et $\overrightarrow{HM_b} = \sin(b-a)\overrightarrow{n}$ où $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix}-\sin(a)\\ \cos a\end{pmatrix}$ est de norme 1 et directement orthogonal à $\overrightarrow{OM_a}$ (ceci se vérifie par le théorème de pythagore ou les formules données précédemment pour $\cos(a+\frac{\pi}{2})$). On pose $\lambda = \sin(b-a)$. En notant $\begin{pmatrix}x_H\\ y_H\end{pmatrix}$ les coordonnées de H.

Alors $\cos b - x_H = -\lambda\sin a$ et $\sin b - y_h = \lambda\cos a$. Il suffit maintenant de remarquer qu'une équation de (OM_a) est $-\sin(a)x + \cos(a)y = 0$ et de remplacer x, y par x_H, y_H pour exprimer le fait que $H \in (OM_a)$ et on trouve la valeur de λ souhaitée.

La preuve des autres formules se fait en faisant le changement $b \to -b$ et en utilisant les propriétés de parité.■

I.1.4 Tableau de valeurs

On a le tableau de valeurs suivant :

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

En effet en $x = \frac{\pi}{4}$, $\sin x = \cos x$ et ces quantitées sont positives. La relation $\cos^2 + \sin^2$ conclut.

Calculons $\sin\frac{\pi}{6}$. Pour cela on dessine un triangle dont les sommets sont $O, M_{-\frac{\pi}{6}}$ et $M_{\frac{\pi}{6}}$. Alors l'angle en O a pour mesure $\frac{\pi}{3}$. De plus, il est isocèle en 0 (côtés 1) et donc il est équilatéral. On en déduit que $2\sin\frac{\pi}{6} = 1$. Ainsi $\cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ car c'est une quantité positive.

On peut compléter ce tableau grâce aux formules précédentes : $\sin(\frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. De même pour cos.

Pour donner les autres valeurs usuelles, on raisonne par symétrie, c'est à dire en utilisant les parités et formules $\cos(\pi \pm x)$.

I.1.5 Exemple
Calculer $\cos(\frac{\pi}{12})$ en remarquant que $\frac{1}{12} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$.

I.1.6 Proposition (Formules trigonométriques II)
Soit $a \in \mathbb{R}$. On a les formules suivantes .

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a = 2\cos^2 a - 1$$

$$\sin 2a = 2\sin a\cos a$$

Preuve.
Il s'agit juste une réécriture des formules précédemment données quand $a = b$ (on a utilisé $\cos^2 + \sin^2 = 1$ également). ■

I.2 Tangente

I.2.1 Exemple
Ecrire les formules trigonométriques pour $\tan(a \pm b)$. Trouver le domaine de validité.

I.2.2 Rappel

$$\frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$$

I.3 Exponentielle complexes

I.3.1 Définition

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On étend la fonction exp *à* $i\mathbb{R}$ *en posant*

$$\exp i\theta = \cos\theta + i\sin\theta.$$

I.3.2 Théorème

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. $e^{ia}e^{ib} = e^{i(a+b)}$.
2. $e^{i0} = 1, e^{i\pi} = -1, e^{i\frac{\pi}{2}} = i$.
3. $e^{-ia} = \frac{1}{e^{ia}}$
4. $e^{i(a-b)} = \frac{e^{ia}}{e^{ib}}$
5. $e^{ina} = \left(e^{ia}\right)^n$

Preuve.
Le premier point est une application des formules d'addition. Les trois autres s'en déduisent simplement ∎

I.3.3 Remarque

1. $\mathrm{Re}(e^{i\theta}) = \cos\theta$ et $\mathrm{Im}(e^{i\theta}) = \sin\theta$
2. $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

I.3.4 Proposition

En pratique, pour factoriser on peut utiliser les identités suivantes. Soient $p, q \in \mathbb{R}$, alors

$$e^{ip} + e^{iq} = e^{i\frac{p+q}{2}}(e^{i\frac{p-q}{2}} + e^{i\frac{q-p}{2}}) = 2e^{i\frac{p+q}{2}}\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$e^{ip} - e^{iq} = e^{i\frac{p+q}{2}}(e^{i\frac{p-q}{2}} - e^{i\frac{q-p}{2}}) = 2ie^{i\frac{p+q}{2}}\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Preuve.
Lire l'énoncé... ∎

I.3.5 Somme et différence trigonométriques

Soient $p, q \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2},\ \cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2},$$

$$\sin p + \sin q = 2\cos\frac{p-q}{2}\sin(\frac{p+q}{2}),\ \sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

Il s'agit seulement de calculer les parties réelles ou imaginaires des formules de factorisation d'exponentielles.

I.3.6 Exemple

Factoriser $1 + \cos t$ et $1 - \sin t$.

Exprimer $\frac{1-e^{it}}{1+e^{it}}$.

I.3.7 Exemple

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculons $\sum\limits_{k=0}^{n} \cos(2kx)$.

I.4 Propriétés des fonctions

I.4.1 M-Remarque

$$\cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin(x),\ \cos(x-\frac{\pi}{2}) = \sin(x)$$

$$\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos(x), \sin(x-\frac{\pi}{2}) = -\cos(x)$$

Ajouter $\frac{\pi}{2}$ à l'angle revient à dériver les fonctions trigonométriques.

I.4.2 Proposition
$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ *et* $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$.

Preuve.
Il s'agit juste de taux d'accroissements. ■

I.4.3 Exemple
Calculer la limite en 0 de $\frac{\cos x - 1}{x^2}$ en factoriant le numérateur.

I.4.4 Théorème
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 + b^2 = 1$. Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ (unique à 2π près) tel que $a = \cos\theta$ et $b = \sin\theta$ ie $a + ib = e^{i\theta}$.

Preuve.
Comme $a^2 \geqslant 0$ et $b^2 \geqslant 0$ et que leur somme vaut 1, on a $a^2, b^{\in}[0, 1]$ donc $a, b \in [-1, 1]$. Ainsi on peut donc voir a comme une valeur de cosinus. On peut donc poser $a = \cos(t)$.

On a maintenant $b^2 = 1 - a^2 = 1 - \cos^2(t) = \sin^2(t)$. Deux cas se présentent.

— Si b et $\sin(t)$ sont de même signe, alors on a bien $b = \sin(t)$ et $\theta = t$ convient.

— Si b et $\sin(t)$ sont de signes opposés, comme $\sin(-t) = -\sin(t)$, $b = \sin(-t)$. De plus $a = \cos(t) = \cos(-t)$ donc $\theta = -t$ convient.

Il nous reste à prouver l'unicité à un multiple entier de 2π près. Supposons que l'on ait un autre angle convenable, c'est à dire que $a + ib = e^{i\theta} = e^{i\theta'}$. Alors par propriété fonctionnelle de l'exponentielle, $e^{i(\theta-\theta')} = 1$ et donc d'après l'étude de cosinus, $\theta - \theta' = 2k\pi$ pour un $k \in \mathbb{Z}$. ■

I.4.5 Remarque

C'est une sorte de réciproque de la forme trigonométrique la plus importante : $\cos^2 + \sin^2 = 1$.

I.4.6 Proposition
Soient $A, B \in \mathbb{R}$ non tous les deux nuls. Alors il existe $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}\ A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2+B^2}\cos(x-\varphi) = \sqrt{A^2+B^2}\sin(x-\psi).$$

Preuve.
Soit $x \in \mathbb{R}$. En factorisant l'expression qui nous intéresse, on obtient :

$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin x\right).$$

Mais on remarque que $\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 + \left(\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 = \frac{A^2+B^2}{A^2+B^2} = 1$ donc les coefficients devant $\cos x$ et $\sin x$ vérifient les hypothèses du théorème précédent, et on peut poser $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} = \cos\varphi$ et $\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} = \sin\varphi$. On a alors

$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2+B^2}(\cos\varphi\cos x + \sin\varphi\sin x) = \sqrt{A^2+B^2}\cos(x-\varphi).$$

L'autre formule se prouve de manière similaire en échangeant A et B au moment de la transformation en cos et sin. ■

II Fonctions trigonométriques réciproques

II.1 Compléments sur les bijections

II.1.1 Définition

Soit $f : E \to F$ une application.

1. *On dit que f est surjective ssi* $\mathrm{Im}(f) = f(E) = F$.
2. *On dit que f est injective ssi $\forall x, y \in E\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ ssi $\forall x, y \in E\ x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ (Remarque : les réciproques de ces implications traduisent le fait que f est une fonction).*

II.1.2 Traduction

f est surjective ssi tout élement de l'ensemble d'arrivé possède au moins un antécédent
f est injective ssi tout élément de l'ensemble d'arrivé possède au plus un antécédent.

II.1.3 Théorème

$f : E \to F$ est bijective ssi f est à la fois injective et surjective.

II.1.4 Exemple

1. $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est injective non surjective.
2. $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$ est surjective non injective.
3. $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est ni injective ni surjective.

II.1.5 Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle. Si f est strictement monotone alors f est injective.

II.1.6 Définition

Soit $f : E \to F$ (dexu ensembles) une application et $A \subset E$.

La restriction de f à A est la fonction $f_{|A} : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$.

L'idée est de définir f sur un domaine plus petit, ce qui est toujours possible.

II.2 Cosinus et sinus

II.2.1 Variations des fonctions trigonométriques

Les variations des fonctions sinus et cosinus (qui sont continues) montrent que

1. $\cos_{|[0,\pi]}$ réalise une bijection (strictement décroissante) de $[0, \pi]$ dans $[-1, 1]$.
2. $\sin_{|[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ réalise une bijection (strictement croissante) de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dans $[-1, 1]$.

II.2.2 Définition

On appelle arcosinus et on note arcsin *la bijection réciproque de* $\sin_{|[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$. *On appelle arccosinus et on note* arccos *la bijection réciproque de* $\cos_{|[0,\pi]}$.

II.2.3 Exercice

Réaliser le tableau de valeur de arcsin *et* arccos *pour les valeurs : -1,* $-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1$

II.2.4 Proposition

arcsin *et* arccos *sont continues sur [-1,1]. De plus on a les propositions suivantes :*

- *1) Pour tout $x \in [-1, 1]$,* $\sin(\arcsin x) = x$ *et* $\cos(\arccos x) = x$.
- *2) Pour tout $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,* $\arcsin(\sin \theta) = \theta$.
- *3) Pour tout $\theta \in [0, \pi]$,* $\arccos(\cos \theta) = \theta$.

arcsin *est paire et* arccos *vérifie l'identité*

$$\forall x \in [-1, 1]\ \ \arccos(-x) = \pi - \arccos x.$$

Preuve.
On admet la continuité.

Les identités 1) à 3) expriment seulement le fait que ce sont les bijections réciproques de $\cos_{|[0,\pi]}$ et $\sin_{|[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$. arcsin est impaire car $\sin_{|[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ l'est.

Soit $x \in [-1,1]$, on pose $\theta = \arccos x \in [0,\pi]$. Dans ce cas, $\pi - \theta \in [0,\pi]$ et

$$\arccos(\cos(\pi-\theta)) = \pi - \theta$$

par 2). Mais on sait également que $\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta = -x$ par 3). On a donc prouvé

$$\arccos -x = \pi - \arccos x.$$

■

II.2.5 Remarque

On fera attention avant d'écrire une égalité du genre $\arcsin(\sin x) = x$. Ce n'est pas vrai pour tout x dans $\mathbb{R}$ (par exemple $x = 1000$).

Ex : $\arccos(\cos(\frac{4\pi}{3})) = \arccos(\cos(\frac{2\pi}{2})) = \frac{2\pi}{3}$.

> **II.2.6 Proposition**
> arccos *et* arcsin *sont dérivables sur* $]-1,1[$ *et pour tout* $x \in]-1,1[$ *on a*
>
> $$\arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \ \arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Preuve.
Etudions d'abord arcsin. On sait que sin est dérivable sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ et que sa dérivée est cos, qui s'annule seulement en $\pm\frac{\pi}{2}$ sur cet intervalle. Ainsi d'après le théorème de dérivation des bijections réciproques, arcsin est dérivable sur $\sin(]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[) =]-1,1[$ et sa dérivée vaut $\frac{1}{\sin' \circ \arcsin}$. Soit maintenant $x \in]-1,1[$. On veut calculer $\cos(\arcsin x)$. Or

$$\forall t \in \mathbb{R} \ \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

On en déduit que $\cos(\arcsin x)^2 = 1 - \sin(\arcsin x)^2$. D'après la proposition précédente, et comme $x \in [-1,1]$, $\sin(\arcsin x) = x$. Ainsi

$$\cos(\arcsin x)^2 = 1 - x^2.$$

Il ne reste plus qu'a trouver le signe de $\cos(\arcsin x)$. Pour cela il suffit de remarquer de l'image de arcsin est $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ et que cos est positive sur cet intervalle. Ainsi

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Le cas de arccos se traite avec un raisonnement similaire. ■

II.2.7 Courbes représentatives

II.2.8 Remarque

On remarque que les dérivées de arcsin et arccos sont opposées sur $]-1,1[$, et donc leur somme est constante sur cet intervalle. Elle vaut par exemple $\arcsin 0 + \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$. On voit immédiatement que c'est également vrai en ± 1 et on a donc

$$\forall x \in [-1,1] \ \arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}.$$

II.3 Tangente

II.3.1 Définition

$\tan_{|]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$ *réalise une bijection (strictement croissante) de* $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ *dans* $\mathbb{R}$.

On appelle arctangente et on note arctan *la bijection réciproque de* $\tan_{|]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$.

II.3.2 Exemple

Donner un tableau de valeurs.

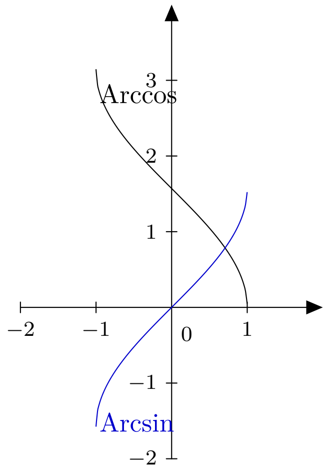

FIGURE 2 – arcsinus et arccosinus

II.3.3 Proposition
La fonction arctangente est impaire, continue sur $\mathbb{R}$ *et dérivable sur* $\mathbb{R}$. *De plus on a les identités suivantes*

$$\forall\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\ \arctan(\tan\theta) = \theta,\ \forall x \in \mathbb{R}\ \tan(\arctan x) = x$$

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \arctan' x = \frac{1}{1+x^2}.$$

La courbe représentative de arctangente admet la droite $y = \frac{\pi}{2}$ *comme asymptote en* $+\infty$.

Preuve.
D'après le théorème de continuité de la réciproque, arctan est continue sur $\mathbb{R}$. De plus la dérivée de tan est $1+\tan^2$ qui est une fonction strictement positive (donc ne s'annule pas). Ainsi arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vaut, pour $x \in \mathbb{R}$

$$\arctan' x = \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Il ne nous reste plus que l'imparité à montrer. On pose pour $x \in \mathbb{R}$, $y = \arctan -x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On a alors

$$y = \arctan -x \Leftrightarrow \tan y = -x \Leftrightarrow \tan -y = x \Leftrightarrow -y = \arctan x.$$

■

II.3.4 Exercice
Etudier $\arctan x + \arctan \frac{1}{x}$.

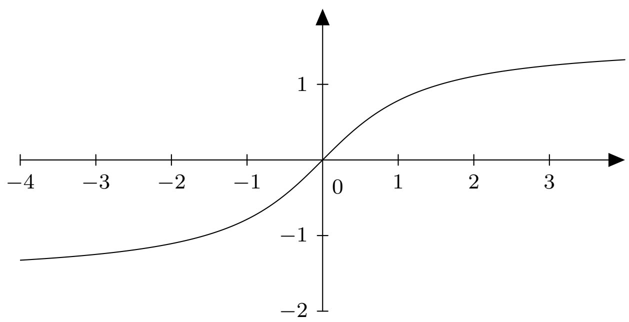

FIGURE 3 – Artangente

Index général

Index des symboles