

Table des matières

- I Intégrales convergentes** 1
- I.1 Intégrales impropres 1
- I.2 Comparaisons de fonctions positives 1
- II Intégrabilité** 1
- II.1 Fonctions intégrables 1
- II.2 Propriétés des fonctions intégrables 2
- III Outils de calcul** 2
- III.1 Changement de variable 2
- III.2 Intégration par parties 2

I Intégrales convergentes

I.1 Intégrales impropres

Définition 1

Soient $a < \boxed{b \leq +\infty}$ et $f \in \mathcal{C}([a, b[, \mathbb{R})$.

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt$ existe et est finie on la note $\int_a^b f(t) dt$ et on dit que cette intégrale est une intégrale (impropre) **convergente**.

Définition 2

Soient $\boxed{-\infty \leq a} < b$ et $f \in \mathcal{C}(]a, b], \mathbb{R})$.

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^b f(t) dt$ existe et est finie on la note $\int_a^b f(t) dt$ et on dit que cette intégrale est une intégrale (impropre) **convergente**.

Définition-Proposition 1

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ (on peut avoir $a = -\infty$ ou $b = +\infty$). Soit $f \in \mathcal{C}(]a, b[, \mathbb{R})$.

S'il existe un $c \in]a, b[$ tel que $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ sont des intégrales convergentes alors on dit que $\int_a^b f$ converge.

Dans ce cas on a $\forall c' \in]a, b[\int_a^{c'} f + \int_{c'}^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ et on note cette valeur $\int_a^b f$.

I.2 Comparaisons de fonctions positives

Théorème 1

Soient $f, g \in \mathcal{C}([a, b[, \mathbb{R})$ des fonctions **positives**.

1. Si $f \leq g$ au voisinage de b et $\int_a^b g$ converge alors $\int_a^b f$ converge.
2. Si $f = O_b(g)$ et $\int_a^b g$ converge alors $\int_a^b f$ converge.
3. Si $f \sim g$ alors $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ sont de même nature.

Le résultat vaut encore pour des fonctions continues et positives sur $]a, b]$, à condition de les comparer en a ...

Proposition 1

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ converge ssi $\alpha > 0$.

Dans le cas de convergence, $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha}$.

Théorème 2 ()

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge ssi $\alpha > 1$.
2. $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge ssi $\alpha < 1$.

II Intégrabilité

II.1 Fonctions intégrables

Définition 3

Soit I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue. On dit que f est **intégrable** sur I ssi $\int_I |f|$ converge.

Théorème 3

Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. SI f est intégrable sur I ALORS $\int_I f$ converge.

II.2 Propriétés des fonctions intégrables

Proposition 2

$L^1(I, \mathbb{K})$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Théorème 4

1. Soit $f \in L^1(I, \mathbb{R}^+)$ une fonction continue positive et intégrable sur I . Si $\int_I f = 0$ alors $\forall x \in I f(x) = 0$.
2. Soit $f \in L^1(I, \mathbb{K})$. Si $\int_I |f| = 0$ alors $\forall x \in I f(x) = 0$.

Proposition 3

Si $f \in L^1(I, \mathbb{K})$ est bornée en module par $M \in \mathbb{R}^+$ et $g \in L^1(I, \mathbb{K})$ alors $fg \in L^1(I, \mathbb{K})$ et

$$\left| \int_I fg \right| \leq M \int_I |g|.$$

III Outils de calcul

III.1 Changement de variable

Théorème 5

Soient $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ et $\varphi :]\alpha, \beta[\rightarrow]a, b[$ une bijection de classe \mathcal{C}^1 strictement croissante.

$$\int_a^b f(t) dt \text{ et } \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u) du \text{ sont de même nature et égales quand elles convergent.}$$

III.2 Intégration par parties

Théorème 6

Soient $u, v : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions de classe \mathcal{C}^1 .

Si $\lim_{x \rightarrow b^-} u(x)v(x)$ existe et est finie alors $\int_a^b u'v$ et $\int_a^b uv'$ sont de même nature et

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$$

où on a noté $[uv]_a^b = \lim_{x \rightarrow b^-} u(x)v(x) - u(a)v(a)$.