

# Table des matières

- I Intégrales convergentes** 1
- I.1 Intégrales impropres 1
- I.2 Comparaisons de fonctions positives 1
- II Intégrabilité** 1
- II.1 Fonctions intégrables 1
- II.2 Propriétés des fonctions intégrables 2
- III Outils de calcul** 2
- III.1 Changement de variable 2
- III.2 Intégration par parties 2

## I Intégrales convergentes

### I.1 Intégrales impropres

**Définition 1**

Soient  $a < \boxed{b \leq +\infty}$  et  $f \in \mathcal{C}([a, b[, \mathbb{R})$ .

Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt$  existe et est finie on la note  $\int_a^b f(t) dt$  et on dit que cette intégrale est une intégrale (impropre) **convergente**.

**Définition 2**

Soient  $\boxed{-\infty \leq a} < b$  et  $f \in \mathcal{C}(]a, b], \mathbb{R})$ .

Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^b f(t) dt$  existe et est finie on la note  $\int_a^b f(t) dt$  et on dit que cette intégrale est une intégrale (impropre) **convergente**.

**Définition-Proposition 1**

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  avec  $a < b$  (on peut avoir  $a = -\infty$  ou  $b = +\infty$ ). Soit  $f \in \mathcal{C}(]a, b[, \mathbb{R})$ .

S'il existe un  $c \in ]a, b[$  tel que  $\int_a^c f$  et  $\int_c^b f$  sont des intégrales convergentes alors on dit que  $\int_a^b f$  converge.

Dans ce cas on a  $\forall c' \in ]a, b[ \int_a^{c'} f + \int_{c'}^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$  et on note cette valeur  $\int_a^b f$ .

## I.2 Comparaisons de fonctions positives

**Théorème 1**

Soient  $f, g \in \mathcal{C}([a, b[, \mathbb{R})$  des fonctions **positives**.

1. Si  $f \leq g$  au voisinage de  $b$  et  $\int_a^b g$  converge alors  $\int_a^b f$  converge.
2. Si  $f = O_b(g)$  et  $\int_a^b g$  converge alors  $\int_a^b f$  converge.
3. Si  $f \sim g$  alors  $\int_a^b f$  et  $\int_a^b g$  sont de même nature.

Le résultat vaut encore pour des fonctions continues et positives sur  $]a, b]$ , à condition de les comparer en  $a \dots$

**Proposition 1**

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ .  $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$  converge ssi  $\alpha > 0$ .

Dans le cas de convergence,  $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha}$ .

**Théorème 2 ( )**

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

1.  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$  converge ssi  $\alpha > 1$ .
2.  $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$  converge ssi  $\alpha < 1$ .

## II Intégrabilité

### II.1 Fonctions intégrables

**Définition 3**

Soit  $I$  un intervalle et  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction continue. On dit que  $f$  est **intégrable** sur  $I$  ssi  $\int_I |f|$  converge.

**Théorème 3**

Soit  $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ . SI  $f$  est intégrable sur  $I$  ALORS  $\int_I f$  converge.

## II.2 Propriétés des fonctions intégrables

### Proposition 2

$L^1(I, \mathbb{K})$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

### Théorème 4

1. Soit  $f \in L^1(I, \mathbb{R}^+)$  une fonction continue positive et intégrable sur  $I$ . Si  $\int_I f = 0$  alors  $\forall x \in I f(x) = 0$ .
2. Soit  $f \in L^1(I, \mathbb{K})$ . Si  $\int_I |f| = 0$  alors  $\forall x \in I f(x) = 0$ .

### Proposition 3

Si  $f \in L^1(I, \mathbb{K})$  est bornée en module par  $M \in \mathbb{R}^+$  et  $g \in L^1(I, \mathbb{K})$  alors  $fg \in L^1(I, \mathbb{K})$  et

$$\left| \int_I fg \right| \leq M \int_I |g|.$$

## III Outils de calcul

### III.1 Changement de variable

#### Théorème 5

Soient  $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$  et  $\varphi : ]\alpha, \beta[ \rightarrow ]a, b[$  une bijection de classe  $\mathcal{C}^1$  strictement croissante.

$$\int_a^b f(t) dt \text{ et } \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u) du \text{ sont de même nature et égales quand elles convergent.}$$

### III.2 Intégration par parties

#### Théorème 6

Soient  $u, v : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Si  $\lim_{x \rightarrow b^-} u(x)v(x)$  existe et est finie alors  $\int_a^b u'v$  et  $\int_a^b uv'$  sont de même nature et

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$$

où on a noté  $[uv]_a^b = \lim_{x \rightarrow b^-} u(x)v(x) - u(a)v(a)$ .