Le cadre d'étude est le suivant : on considère des fonctions f continues sur un **segment** $[a,b]$. I désigne un intervalle non vide et non réduit à un point

I Propriétés de l'intégrale

Exercice 1
Soient $f,g \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ et $M = \sup_{[a,b]} |f|$. Montrer que $\int\limits_a^b |fg| \leqslant M \int\limits_a^b |g|$.

Exercice 2
Calculer $\int_0^{2\pi} |\cos(t)|\mathrm{d}t$.

II Théorème fondamental et conséquences

Exercice 3
Prouver l'inégalité des accroissements finis dans le cas où $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$.

Exercice 4
Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_1^2 \frac{1}{t\sqrt{t}}\mathrm{d}t$
2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2u+\frac{\pi}{4})\mathrm{d}u$
3. $\int_0^{\pi} e^{4it}\mathrm{d}t$
4. $\int_0^1 \frac{t^2-1}{t^2+1}\mathrm{d}t$
5. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$
6. $\int_0^1 e^{-x}\cos(2x)\mathrm{d}x$

Exercice 5
Tracer la courbe représentative de $\varphi : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$ en admettant que $\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\to} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 6
Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$. Montrer que $\forall Q \in \mathbb{K}_n[X]$ $\int\limits_0^1 P(t)Q(t) = 0 \iff P$ est le polynôme nul.

Exercice 7
Trouver une primitive de ln sur $]0,+\infty[$

Exercice 8
Calculer $\int x^2 e^x \mathrm{d}x$.

Exercice 9
Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n}\mathrm{d}x$. Calculer $F_1(x)$ puis trouver une relation entre F_n et F_{n+1}.

Exercice 10
Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $W_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\mathrm{d}t$. Calculer W_0, W_1 puis trouver une relation de récurrence pour la suite (W_n).

En déduire W_n en fonction de n.

Exercice 11
Calculer $\int\limits_{-1}^{1} (\mathrm{sh}(t)\cos(\ln(1+t^2)))\mathrm{d}t$.

Exercice 12
Montrer que $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2$ et en déduire la valeur de ces intégrales.

Exercice 13
Calculer :

1. $\int \frac{t^3+2t^2+4t}{t^2+2t+2}\mathrm{d}t$
2. $\int\limits_0^3 \frac{1}{t^2-2t+5}\mathrm{d}t$
3. $\int \frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x$

III Sommes de Riemann

Exercice 14

1. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\prod\limits_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}}$
2. Déterminer un équivalent simple de $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n+2k}^3$
3. Déterminer un équivalent de $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{k}$