# Intégrales sur un segment

**Exercice 1 (Les incontournables)**
Calculer directement une primitive de :

1. $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
2. $x \mapsto \sqrt[42]{x}$
3. $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$
4. $x \mapsto e^{i\pi x+\sqrt{729}x}$
5. $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$
6. $x \mapsto \frac{1}{(2x+7)^2+1}$
7. $x \mapsto \cos(e^2 x - 728435)$
8. $x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{x}\sqrt{\sqrt{x}}}$
9. $w \mapsto -3w + \mathrm{ch}(4w)$

**Exercice 2**
Donner des primitives, sans changement de variable ni intégration par parties de :

1. $x \mapsto xe^{-2x^2}$
2. $x \mapsto \frac{x^2}{1+x^3}$
3. $x \mapsto \frac{\ln(\ln(x))}{x}$
4. $x \mapsto \exp(e^x + x)$
5. $x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)\sqrt{\tan(x)}}$
6. $x \mapsto \frac{1}{x\ln^2(x)}$
7. $x \mapsto \tan^2(x)$
8. $x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{2+\ln(3x)}}$
9. $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$

**Exercice 3**
Calculer

1. $\int \sin(x)e^{2x}\mathrm{d}x$
2. $\int \sin(t)\,\mathrm{sh}(t)\mathrm{d}t$

**Exercice 4**
Sans utiliser les propriétés de ln, montrer que pour $a, b > 0$ on a $\int_1^{ab} \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \int_1^{a} \frac{1}{t}\mathrm{d}t + \int_1^{b} \frac{1}{t}\mathrm{d}t$.

**Exercice 5**
Calculer, en changeant de variable

1. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin(t)}\mathrm{d}t$ avec $u = \cos(t)$
2. $\int \frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\mathrm{d}x$ avec $t = e^x$.
3. $\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{\ln(u)}{1+u^2}\mathrm{d}u$ avec $t = \frac{1}{u}$.
4. $\int_{-1}^{1} t^2\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$ avec $t = \sin(\theta)$.

# Convergence

**Exercice 6**
Etudier la convergence des intégrales :

1. $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t}$ sur $]0, 1]$
2. $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^2}$ sur $[1, +\infty[$.
3. $t \mapsto \sqrt{1+t^2} - t$ sur $[0, +\infty[$.
4. $t \mapsto e^{-\ln(t)^2}$ sur $[1, +\infty[$
5. $t \mapsto e^{-t\arctan(t)}$ sur $[0, +\infty[$.
6. $t \mapsto \frac{e^{\sin(t)}}{t}$ sur $[1, +\infty[$.
7. $t \mapsto \frac{\sqrt{\ln(t)}}{(t-1)\sqrt{t}}$ sur $]1, +\infty[$.
8. $t \mapsto e - \left(1+\frac{1}{t}\right)^t$ sur $[1, +\infty[$

**Exercice 7**
Etudier la convergence et calculer le cas échéant :

1. $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}$.
2. $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$.
3. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t+1}t + 2\mathrm{d}t$
4. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^t-1}\mathrm{d}t$.

# Plus technique

**Exercice 8**
Calculer, après avoir prouver leurs existences :

1. $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\mathrm{d}t$
2. $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$
3. $\int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}\mathrm{d}x$
4. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x$ (changement de variable)
5. $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}\mathrm{d}t$

**Exercice 9**
Soit $f \in \mathcal{C}([0, +\infty[, \mathbb{R})$ une fonction intégrable. Montrer que $\int_x^{x+1} f(t)\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\to} 0$.

**Exercice 10**

1. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t$ converge en $+\infty$ mais pas en 0.

   On pose maintenant $f : \left\{ \begin{array}{ccc} ]0, +\infty[ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t \end{array} \right.$.
2. Donner un équivalent de $f$ en 0.
3. Après avoir montré que $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\mathrm{d}t o_{+\infty}\left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t\right)$, donner un équivalent de $f$ en $+\infty$.

## Avec des paramètres

**Exercice 11**
Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que $\int\limits_0^{+\infty} \frac{t-\sin(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge.

**Exercice 12**
A quelle condition sur $x \in \mathbb{R}$ l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{xt}{t}\mathrm{d}t$ converge ?

**Exercice 13**
Pour $a > 0$, calculer $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+a^2}\mathrm{d}t$ après avoir prouvé son existence.

**Exercice 14**
Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n = \int\limits_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t$. Justifier la convergence et calculer $I_n$ en fonction de $n$.

**Exercice 15**
Calculer $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2n}e^{-t^2}\mathrm{d}t$ en sachant que $I_0 = \sqrt{\pi}$.