Complexes

Antoine Louatron

Table des matières

I Représentations des complexes

On se place dans un Repère OrthoNnormé Direct $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ fixé pour tout le cours.

I.1 Forme algébrique

I.1.1 Définition-Proposition

Le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes est l'ensemble des nombres de la forme $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ et i un "nombre" tel que $i^2 = -1$. Cette écriture est alors unique et on appelle x la partie réelle (notée $\mathrm{Re}(z)$) et y la partie imaginaire (notée $\mathrm{Im}(z)$).

On pose en outre, pour $z, z' \in \mathbb{C}$ s'écrivant $x + iy$ et $x' + iy'$,

$$z + z' = (x + x') + i(y + y') \text{ et } zz' = (xx' - yy') + i(x'y + xy')$$

Preuve.
Montrer l'unicité par linéarité. ■

I.1.2 Notation

On note $i\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres complexes dont la partie réelle est nulle (appelés imaginaires purs).

I.1.3 M-Remarque

Pour $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ on a par définition $\mathrm{Re}(z_1 + z_2) = \mathrm{Re}(z_1) + \mathrm{Re}(z_2)$ et $\mathrm{Im}(z_1 + z_2) = \mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2)$.
Plus subtil : Si $a \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{Z}$ alors $\mathrm{Re}(az) = z\,\mathrm{Re}(a)$ et $\mathrm{Im}(az) = a\,\mathrm{Im}(z)$.
On en déduit (par une récurrence immédiate) que

$$\mathrm{Re}(\sum_{k=1}^{n} az_k) = a \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Re}(z_k)$$

I.1.4 Affixe

Point <-> coordonnées <-> complexe.
Vecteur <-> coordonnées <-> complexe, pareil avec vecteur entre 2 points.

I.1.5 Définition

Soit $z \in \mathbb{C}$. On note x et y ses parties réelles et imaginaires.

1. *Le conjugué de z est le complexe $x - iy$ noté $\overline{z}$.*
2. *Le module de z est le réel positif $\sqrt{x^2 + y^2}$ noté $|z|$.*

I.1.6 Proposition

Soit $z \in \mathbb{C}$. On a $|z|^2 = z\overline{z}$ et $|z| = 0 \iff z = 0$.

Preuve.
Il s'agit d'un calcul direct. ■

I.1.7 Inverse

$z \in \mathbb{C}$ possède un inverse ssi il est non nul et $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.
Exemple : Calculer la forme algébrique de $\frac{1}{-1+2i}$.

I.2 Propriétés algébriques

I.2.1 Proposition (Propriétés de la conjugaison)

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a alors

1. $\overline{\overline{z_1}} = z_1$.
2. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.
3. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$.
4. *Si* $z_1 \neq 0$ *alors* $\overline{z_1} \neq 0$ *et* $\overline{\left(\frac{1}{z_1}\right)} = \frac{1}{\overline{z_1}}$.
5. $z_1 \in \mathbb{R} \iff z_1 = \overline{z_1}$ *et* $z_1 \in i\mathbb{R} \iff z_1 = -\overline{z_1}$.

Preuve.
Pour 1, 2, 3, 4 il suffit de faire le calcul qui est immédiat.

Pour 5, on remarque que $z_1 = 0 \Leftrightarrow (x_1 = 0 \text{ et } y_1 = 0) \Leftrightarrow \overline{z_1} = 0$. On calcule maintenant $\overline{\left(\frac{1}{z_1}\right)}$.

$$\overline{\left(\frac{1}{z_1}\right)} = \frac{x_1}{x_1^2+y_1^2} + i\frac{y_1}{x_1^2+y_1^2}$$

et

$$\frac{1}{\overline{z_1}} = \frac{x_1}{x_1^2+(-y_1)^2} - i\frac{-y_1}{x_1^2+(-y_1)^2} = \overline{\left(\frac{1}{z_1}\right)}.$$

6) : $z_1 = \overline{z_1} \iff y_1 = -y_1$ par unicité de la partie imaginaire, c'est à dire ssi $y_1 = 0$ soit encore $z_1 = x_1 \in \mathbb{R}$. On montre l'autre équivalence de la même manière. ∎

I.2.2 Remarque

$\mathrm{Re}\, z_1 = \frac{z_1+\overline{z_1}}{2}$ et $\mathrm{Im}\, z_1 = \frac{z_1-\overline{z_1}}{2i}$.
On retrouve $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$.

I.2.3 Proposition (Propriétés du module)
Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a alors

1. $|z_1| \geqslant 0$ *et* $|z_1| = 0$ *ssi* $z_1 = 0$.
2. $|z_1| \geqslant \mathrm{Re}\, z_1$ *et* $|z_1| \geqslant \mathrm{Im}\, z_1$, *l'égalité ayant lieu ssi* $z_1 \in \mathbb{R}_+$ *ou* $z_1 \in i\mathbb{R}_+$ *respectivement.*
3. $|z_1|^2 = z_1\overline{z_1}$, *donc* $|z_1| = |\overline{z_1}|$.
4. $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$.
5. *Si* $z_1 \neq 0$ *alors* $|z_1| > 0$ *et* $\left|\frac{1}{z_1}\right| = \frac{1}{|z_1|}$.

Preuve.

1. C'est immédiat d'après la définition.
2. En effet $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2+y^2} \geqslant \sqrt{x^2} = |x| \geqslant x$, avec égalité ssi x est positif et $y = 0$. On raisonne de la même manière pour la partie imaginaire.
3. On a en effet $z_1\overline{z_1} = (x_1+iy_1)(x_1-iy_1) = x_1^2+y_1^2 = |z_1|^2$.
4. On va montrer que les carrés de ces modules sont égaux, ce qui conclura d'après 1 (car $f_{\frac{1}{2}} : x \mapsto \sqrt{x}$ est une bijection $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ d'après le chapitre 1). Mais on a d'après 3)

   $$|z_1z_2|^2 = \underbrace{z_1z_2.\overline{z_1z_2} = z_1z_2.\overline{z_1}.\overline{z_2}}_{I.2.1\ 2)}$$

   Donc, comme la multiplication dans $\mathbb{C}$ est commutative,

   $$|z_1z_2|^2 = z_1\overline{z_1}z_2\overline{z_2} = |z_1|^2|z_2|^2$$

   encore une fois par 3). ∎

I.2.4 Remarques

1. On utilise souvent 3) pour calculer l'inverse d'un complexe non nul. En effet, comme $|z|^2 = z\overline{z}$ on a

   $$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

   Ainsi il existe un unique inverse pour tout complexe non nul.. On est bien content.
2. Comme une division n'est rien d'autre qu'une multiplication par l'inverse, on en déduit une méthode pour "chasser les complexes du dénominateurs" :

   $$\frac{z}{z'} = \frac{z\overline{z'}}{|z'|^2}.$$

   On multiplie par le conjugué de z' et on obtient un complexe sous forme algébrique.

I.3 Argument d'un complexe

I.3.1 Proposition (Définition d'un argument)
Si $z \in \mathbb{C}^*$ alors il existe un unique $r \in \mathbb{R}_+^*$ et un unique $\theta \in]-\pi, \pi]$ tel que

$$z = re^{i\theta}.$$

C'est la forme trigonométrique *de z. On dit que θ est l'*argument principal *de z. On le note* $\arg z$.
Un argument de z est un nombre phi tel que $z = |z|e^{i\varphi}$ et on a donc $\varphi = \theta + 2k\pi$ pour un $k \in \mathbb{Z}$.

Preuve.
Comme $z \neq 0$. On pose $u = \frac{z}{|z|} = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$

$$\left|\frac{z}{|z|}\right| = 1$$

On a donc $a^2 + b^2 = 1$ et il existe donc un unique $\theta \in]-\pi, \pi]$ tel que

$$a = \cos\theta \text{ et } b = \sin\theta$$

Donc on peut écrire $u = e^{i\theta}$. On pose alors $r = |z|$ et on a $z = ru = re^{i\theta}$.
L'unicité de r est immédiate car $|re^{i\theta}| = |r|$. ■

I.3.2 Interprétation géométrique

Angle entre $\vec{\imath}$ et $\overrightarrow{OM}$. Cela à un sens car $M \neq O$.

I.3.3 Proposition (Propriétés de l'argument)
Soient $z, z' \in \mathbb{C}^*$

1. $\arg(-z) \equiv \arg z + \pi(-2\pi)$, $\arg \overline{z} \equiv -\arg z(+2\pi)$, $\arg(\frac{1}{z}) \equiv -\arg z(+2\pi)$
2. $\arg(zz') \equiv \arg z + \arg z'(\pm 2\pi)$.
3. $\arg(\frac{z}{z'}) \equiv \arg z - \arg z'(\pm 2\pi)$.
4. $z \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg z = 0$. $z \in \mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg z = \pi$.
5. $z \in i\mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg z = \frac{\pi}{2}$. $z \in i\mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg z = -\frac{\pi}{2}$.

Preuve.
Soient $z, z' \in \mathbb{C}^*$

1. La propriété de "morphisme" de l'exponentielle complexe nous permet de dire que $-z = (-1)z = e^{i\pi}z$. De plus, si $z = re^{i\theta}$ alors $\overline{z} = re^{-i\theta}$ et $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$. Il ne reste qu'a appliquer la définition d'un argument.
2. C'est encore une fois évident en notant z et z' sous forme trigonométrique.
3. Idem
4. $z \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow e^{i\theta} = 1 \Leftrightarrow \theta \equiv 0 \mod 2\pi$. On raisonne de la même manière pour les autres équivalences. ■

I.3.4 Exemple
Montrer que $1 + i$, $2i$ et 2 sont les affixes de 3 points alignés.

I.3.5 Remarque

On vient de prouver le lien qui existe entre les formes algébriques et trigonométriques d'un complexe. Si $z \in \mathbb{C}^*$ et $z = x + iy = re^{i\theta}$ alors

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \text{ et } \begin{cases} r &= \sqrt{x^2 + y^2} = |z| \\ \cos\theta &= \frac{x}{r} \\ \sin\theta &= \frac{y}{r} \end{cases}$$

I.3.6 Exemple

Trouver les formes exponentielles de $1+i, 1-i\sqrt{3}, -3-4i$.

I.3.7 Remarque

Conjugué d'une forme exponentielle.

II Géométrie

II.1 Module

II.1.1 Distance

On a vu que le module de z est la distance entre O et le point d'affixe z.

Plus généralement, la distance entre 2 points d'affixes z_A et z_B est $|z_B - z_A| = |z_A - z_B|$. C'est le module de l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$

II.1.2 Proposition

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

1. $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$ *et il y a égalité ssi* $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+ \ z_1 = \lambda z_2$. *(Inégalité triangulaire)*
2. $||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 - z_2|$. *Deuxième inégalité triangulaire.*

Preuve.

1. On utilise encore $|z|^2 = z\overline{z}$ pour calculer le carré du module qui nous intéresse :

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2 &= (z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}\\ &= (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2}) \text{ par I.2.1 1)}\\ &= |z_1|^2+|z_2|^2+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}\\ &= |z_1|^2+|z_2|^2+2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2})\\ &\leqslant |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1\overline{z_2}| \text{ par 2)}\\ &\leqslant |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2| \text{ par 3) et 4)}\\ &\leqslant (|z_1|+|z_2|)^2\end{aligned}$$

Comme les modules sont positifs par 1), on en déduit l'inégalité triangulaire.
Il y a égalité ssi $\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) = |z_1\overline{z_2}|$, c'est a dire (d'après I.2.1 1) et 6))

$$z_1\overline{z_2} = \overline{z_1}z_2.$$

Si on suppose $z_1 \neq 0$ et $z_2 \neq 0$ (qui est le cas $\lambda = 0$, où l'égalité est triviale) cela implique

$$z_1 = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}z_2.$$

Mais on sait que $z_1\overline{z_2} \in \mathbb{R}_+^*$ (par 2)) et donc $\frac{z_1\overline{z_2}}{|z_1|^2} \in \mathbb{R}_+^*$. Cela prouve que $\overline{\left(\frac{z_2}{z_1}\right)} \in \mathbb{R}_+^*$.
Réciproquement, si $z_1 = \lambda z_2$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+$, alors

$$|z_1+z_2| = |(1+\lambda)z_2| = |(1+\lambda)||z_2| = (1+\lambda)|z_2| = |z_2| + \lambda|z_2| = |z_1| + |z_2|$$

2. On a en effet $z_1 = (z_1+z_2) - z_2$ on en déduit

$$|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \leqslant |z_1 - z_2| + |z_2|$$

par inégalité triangulaire, et donc

$$|z_1| - |z_2| \leqslant |z_1 - z_2|.$$

Il suffit maintenant d'échanger z_1 et z_2 pour trouver

$$|z_2| - |z_1| \leqslant |z_1 - z_2|,$$

ce qui implique l'inégalité souhaitée. ■

II.1.3 Exemple

Résoudre $|z-1| = |z-i|$ géométriquement.

II.2 Alignement et orthogonalité

II.2.1 Vecteurs colinéaires, points alignés

Traduire sous forme d'angle, argument, puis $\in \mathbb{R}$.

II.2.2 Vecteurs orthogonaux

Angle, argument d'un quotient/produit et $\in i\mathbb{R}$.

II.3 Transformations du plan

II.3.1 Addition

Soit $b \in \mathbb{C}$ et B le point du plan d'affixe b. L'application $f : z \mapsto z + b$ se comporte sur le plan complexe comme une translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$.

II.3.2 Opposés

Décrire le point d'affixe $-z$ par rapport au point d'affixe z.

II.3.3 Conjugué

Le point d'affixe $\overline{z}$ est le symétrique du point d'affixe z par rapport à (Ox).

II.3.4 Exercice

Comment obtenir la symétrie d'axe (Oy) ?

II.3.5 Multiplication par $e^{i\alpha}$

Cette fois on utilise la représentation trigonométrique (qui est plus adaptée à l'étude des produits). Si on écrit, pour $z \neq 0$, $z = re^{i\theta}$ alors $e^{i\alpha}z = re^{i(\alpha+\theta)}$, c'est à dire l'image du point z par la rotation de centre O et d'angle α

II.3.6 multiplication par $k > 0$

Homothetie de centre O et de rapport k.

III Complexes et exponentielle

III.1 Exponentielle complexe

III.1.1 Définition

Soit $z \in \mathbb{C}$ de forme algébrique $x + iy$. On appelle exponentielle de z le nombre $e^x e^{iy}$, noté e^z.

III.1.2 Exemple

Donner les formes algébriques et trigonométriques de e^{5-i}.

III.1.3 Théorème (Propriétés de l'exponentielle complexe)

1. *L'exponentielle complexe est périodique de période $2i\pi$, c'est à dire que $\forall z \in \mathbb{C}$ $e^{z+2i\pi} = e^z$.*
2. *Propriété fonctionnelle de l'exponentielle : $\forall z, z' \in \mathbb{C}$ $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$. En particulier $\forall z \in \mathbb{C}$ $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$.*
3. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^{\overline{z}} = \overline{e^z}$.*
4. *On a $e^z = e^{z'} \iff z = z' + 2ik\pi$ pour un $k \in \mathbb{Z}$.*

Preuve.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ de forme algébrique $x + iy$, alors $e^{z+2i\pi} = e^x e^{y+2i\pi} = e^x e^y = e^z$.
2. Soient $z, z' \in \mathbb{C}$, de forme algébriques respectives $x + iy$ et $x' + iy'$. On a alors
$$e^{z+z'} = e^{x+x'+i(y+y')} = e^x e^{x'} e^{iy} e^{iy'} = e^z e^{z'}.$$
3. Soit $z \in \mathbb{C}$ de forme algébrique $z = x + iy$. $\overline{e^z} = \overline{e^x e^{iy}} = \overline{e^x}\,\overline{e^{iy}} = e^x e^{-iy} = e^{\overline{z}}$.
4. Si on a $e^z = e^{z'}$ alors en utilisant la propriété de morphisme on trouve $e^{z-z'} = 1$ ou encore avec des notations évidentes $e^{x-x'}e^{i(y-y')} = 1$. Ainsi $e^{x-x'} = 1$ (égalité des modules) et donc $e^{i(y-y')} = 1$. On trouve alors $\cos(y - y') = 1$ et ainsi $y = y' + 2k\pi$. C'est la conclusion désirée. ∎

III.1.4 M-Remarque

L'exponentielle ainsi définie $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ est surjective mais non injective.

III.2 Racines de l'unité

On cherche à calculer les racines n-ième de 1, c'est à dire les complexes qui vérifient $z^n = 1$ pour $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. On fixe dorénavant $n \geqslant 2$.

III.2.1 Racines n-ième

Racine !n-ième Soit $z \in \mathbb{C}$ de forme trigonométrique $re^{i\theta}$.

$$\begin{aligned} z^n = 1 &\Leftrightarrow r^n e^{in\theta} = 1 \\ &\Leftrightarrow r = 1 \text{ et } n\theta \equiv 0 \mod 2\pi \\ &\Leftrightarrow r = 1 \text{ et } \exists k \in \mathbb{Z}\ n\theta = 2k\pi \\ &\Leftrightarrow r = 1 \text{ et } \exists k \in \mathbb{Z}\ \theta = \frac{2k\pi}{n} \end{aligned}$$

On admet que prendre $k \in \{0, \dots, n-1\}$ est suffisant pour obtenir toutes les racines n-ème de 1. En effet, si $1, e^{\frac{2\pi}{n}}, \dots, e^{\frac{2k\pi}{n}}, \dots, e^{\frac{2(-1)\pi}{n}}$ sont différents, alors on a trouvé n racines à un polynôme de degré n.

III.2.2 Remarques

On a pas le droit de noter $\sqrt[n]{z}$ pour un complexe qui ne serait pas un réel (positif pour n pair).

III.2.3 Théorème
Les n racines n-ième de l'unité sont $1, e^{\frac{2i\pi}{n}}, \dots, e^{\frac{2i(n-1)\pi}{n}}$.

On note $\mathbb{U}_n = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}}\}_{k=0..n-1}$ leur ensemble.

III.2.4 Remarque

Toutes les racines de l'unité sont des puissances de $e^{\frac{2i\pi}{n}}$, qui représente en fait une rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$ que l'on effectue n fois pour retrouver le point d'affixe 1.

III.2.5 Position sur le cercle trigonométrique

On note généralement $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. C'est une racine 3-ème de l'unité, les autres sont 1 et $\bar{j}$. On peut les représenter sur le cercle trigonométrique : On obtient un triangle équilatéral. Plus généralement, si on représente $\mathbb{U}_n$ sur le cercle

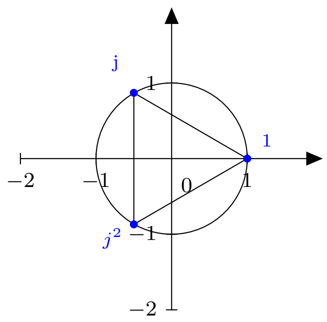

FIGURE 1 – Racines troisième de l'unité

trigonométrique, on obtient un polygone régulier à n cotés comme montré sur la figure 2

III.2.6 Proposition
Soit $n > 1$ un entier.

$$1 + e^{\frac{2i\pi}{n}} + e^{\frac{4i\pi}{n}} + \cdots + e^{\frac{2(n-1)i\pi}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = 0$$

Preuve.
Il s'agit d'un somme géométrique de raison $e^{\frac{2i\pi}{n}} \neq 1$ donc égale à $\frac{1-(e^{\frac{2i\pi}{n}})^n}{1-e^{\frac{2i\pi}{n}}} = 0$ ∎

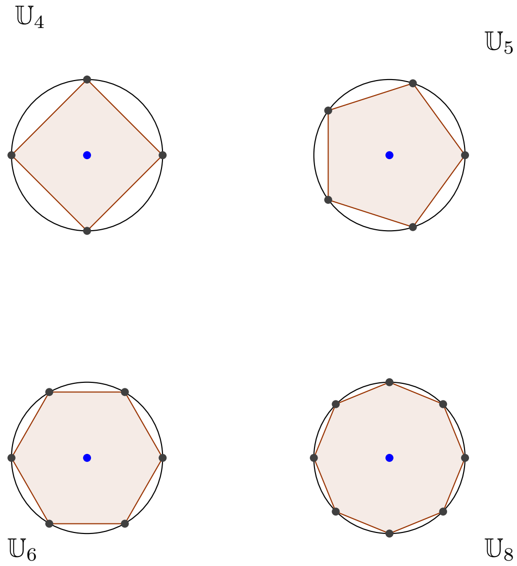

FIGURE 2 – Polygones réguliers

III.2.7 Exemple
On retrouve en particulier :

$$1+(-1)=0,\ 1+j+j^2=0,\ 1+i+(-1)+(-i)=0$$

III.2.8 Racines carrées

Soit $z\in\mathbb{C}^*$ de forme trigonométrique $re^{i\theta}$. Alors les racines carrées de z sont $\pm\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$. il suffit maintenant de savoir calculer $\sin(\frac{\theta}{2})$ et $\cos(\frac{\theta}{2})$ pour conclure. Cela peut se faire grâce aux formules $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$.

III.2.9 Racine n-ième d'un complexe

Soit $a\in\mathbb{C}^*$, on cherche les solutions complexes de $z^n = a$. On prend donc $z\in\mathbb{C}$ et on note $a = r_a e^{i\theta_a}$.

On pose $z = re^{i\theta}$ (0 n'est pas solution). L'équation devient $r^n e^{ni\theta} = r_a e^{i\theta_a}$. Alors $r^n = r_a$ et $n\theta = \theta_a + 2k\pi$. On conclut comme pour les racines de l'unité.

III.2.10 Remarque

Pour trouver les racines n-ièmes d'un complexes (ou d'un réel, qui n'est qu'un complexe particulier après tout) il faut en trouver une particulière (sous forme algébrique ou trigonométrique). On multiplie ensuite cette racine particulière par les racines de l'unité pour trouver toutes les racines n-ièmes.

III.2.11 Exemple
Calculons les racines 5-ième de 32

III.2.12 Proposition
Tout nombre complexe non nul $a = re^{i\theta}$ admet exactement n racines n-ième distinctes qui sont

$$\{r^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}\}_{k\in\{0,\dots,n-1\}}.$$

On remarque donc que si α est une racine n-ième de a alors l'ensemble de ses racines n-ième est $\{\alpha\omega_n |\ \omega_n\in\mathbb{U}_n\}$.

De plus la somme des racines n-ième de a vaut 0.

III.2.13 Exemple
Résoudre l'équation $z^3 = (z-1)^3$ de deux manières différentes.

— On remarque que $z=1$ n'est pas solution et donc on obtient $\frac{z}{z-1}\in\mathbb{U}_3$, c'est à dire $\frac{z}{z-1} = 1$ ou j ou j^2. On ne peut évidemment pas avoir $z = z-1$ donc $\frac{z}{z-1}\neq 1$.

On retrouve $\frac{z}{z-1}=j \iff z(1-j)=-j \iff z=\frac{j}{j-1}$ ou $z=\frac{j^2}{j^2-1}$. EN appliquant la méthode de l'angle moitié on trouve $z=\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{2i\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{e^{-i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{3}}$ ou $z=\frac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{3}}$.
Les solutions sont complexes conjuguées.

— Deuxième méthode : on développe.
On obtient $0=-3z^2+3z-1$ ou encore $0=z^2-z+\frac{1}{3}$.
Le discriminant est $-\frac{1}{3}$ et donc les solutions sont $\frac{1\pm i\frac{1}{\sqrt{3}}}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{1}{2}i\right)$

IV Equations du second degré

IV.1 Racines carrées

IV.1.1 Définition

Soit $A=a+ib$ un nombre complexe fixé. On dit que $z\in\mathbb{C}$ est une racine carré de A ssi $z^2=A$.

D'après la section précédente, tout complexe non nul possède exactement deux racines carrées distinctes et 0 possède une racine carrée double qui est 0.

IV.1.2 M-Remarque

Si on a $z_1^2=z_2^2=A$ alors en factorisant $z_1^2-z_2^2=0$ on trouve $z_1=\pm z_2$. Les deux racines carrées d'un complexe non nul sont toujours opposées.

IV.1.3 Méthode

On pose $z=x+iy$, et on cherche à déterminer les $xety$ qui font que z est une racine carré de A, c'est à dire $(x+iy)^2=a+ib$. Astuce : les modules sont aussi égaux.

IV.1.4 Exemple

Calculons les racines carrés de $3+4i$. On cherche un complexe $x+iy$ tel que $(x+iy)^2=3+4i$; L'autre racine carrée sera son opposé. On obtient le système

$$\begin{cases} x^2-y^2 & =3 \\ x^2+y^2 & =\sqrt{25}=5 \\ 2xy=4 \end{cases}$$

On en déduit que $x^2=4$ et $y^2=1$. De plus, x et y sont de même signe d'après la dernière équation. Ainsi les racines de $3+4i$ sont $\pm(2+i)$.

IV.1.5 Proposition

Soit $A\in\mathbb{C}^*$. Alors A admet deux racines carrée distinctes et opposées.

Explication Il n'y a PAS de racine carré privilégiée dans $\mathbb{C}$, ce qui interdit l'utilisation du symbole $\sqrt{}$.

IV.1.6 Exercice

Calculer les racines carrées de 5, -1, $3+2i$, $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

IV.2 Racines d'un polynôme du second degré

IV.2.1 Calcul des racines

On va chercher les racines complexes d'un polynôme de degré 2 à coefficients complexes. On résout donc l'équation

$$az^2+bz+c=0$$

avec $a\neq 0$. On commence par diviser chaque membre de l'équation par a qui est non nul

$$\begin{aligned} az^2+bz+c=0 &\Leftrightarrow z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}=0 \\ &\Leftrightarrow (z+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0 \\ &\Leftrightarrow (z+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \end{aligned}$$

La quantité $\Delta = b^2 - 4ac$ se nomme discriminant de l'équation. Notons δ une racine carrée de Δ ie on a $\Delta = \delta^2$. L'équation devient $(z + \frac{b}{2a})^2 - \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2 = 0$ ou encore $(z - \frac{-b-\delta}{2a})(z - \frac{-b+\delta}{2a}) = 0$ d'après le théorème de factorisation dans un anneau. On obtient donc le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{lll} z + \frac{b}{2a} & = & \frac{\delta}{2a} \\ z + \frac{b}{2a} & = & -\frac{\delta}{2a} \end{array}\right.$$

Soit encore le "classique" $z = \frac{-b \mp \delta}{2a}$.

IV.2.2 Théorème (Racines d'un polynôme du second degré)
Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que $a \neq 0$. Alors l'équation

$$az^2 + bz + c = 0$$

admet deux solutions complexes si $\Delta = b^2 - 4ac \neq 0$, et une solution dans le cas contraire. Si on note δ une racine carré de Δ les solutions sont

$$z = \frac{-b \pm \delta}{2a}.$$

On a donc noté $\Delta = \delta^2$.

IV.2.3 Exercice
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(1+i)z^2 + 2iz - 4 = 0$.

IV.2.4 Coin culture

Théorème de d'Alembert-Gauss :
Soit P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$. Alors P admet au moins une racine complexe.

Mais on ne peut pas trouver de formules simple comme on vient d'exhiber pour les degrés important

Les équations de degré 5 ou plus ne sont pas résolubles par radicaux.

On ne peut pas exprimer sous une forme générale un racine d'un polynôme de degré 5 ou plus en fonction des coefficients et de racines carrée/cubique...

IV.3 Relation coefficients-racines

IV.3.1 Calculs

On considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$. Notons z_1 et z_2 ses racines (qui sont confondues si $b^2 - 4ac = 0$.) On a alors la factorisation

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$$

On en déduit les relations suivantes :

$$b = a(-z_1 - z_2), \; c = az_1z_2.$$

On peut se servir de ces relations pour déduire la deuxième racine d'un polynôme de degré deux si on en connaît une.

IV.3.2 Somme et produit

Si on connaît la somme $S = z_1 + z_2$ et le produit $P = z_1z_2$ de deux complexes, alors d'après ce qui précède, z_1 et z_2 sont les solutions de $z^2 - Sz + P = 0$.

Réciproquement, si z_1 et z_2 sont racines de $z^2 - Sz + P = 0$ alors $z_1 + z_2 = S$ et $z_1z_2 = P$.

IV.3.3 Exemple
Les racines de l'équation $x^2 - 5x + 6 = 0$ sont 2 et 3.

Index général

Index des symboles