I Opérations

I.1 Produit, puissances

Proposition 1
Soit $n \in \mathbb{N}, A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Si $AB = BA$ alors

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} A^k B^{n-k}$$

Proposition 2
Soit $n \in \mathbb{N}, A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si $AB = BA$ alors

$$A^n - B^n = (A-B) \sum_{k=0}^{n-1} A^k B^{n-1-k} = (A-B) \sum_{k=0}^{n-1} A^{n-1-k} B^k$$

I.2 Inversibilité

Définition 1
Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite inversible ssi il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$AB = I_n = BA.$$

Dans ce cas on note $B = A^{-1}$ et pas $\frac{1}{A}$. En particulier on ne notera pas de quotients de matrices, mais des produits par l'inverse.

On note $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n inversibles. Ce n'est pas un espace vectoriel !

Proposition 3
On dit que $GL_n(\mathbb{K})$ est un groupe pour $\times$:

1. $I_n \in GL_n(\mathbb{K})$
2. *Le produit de deux matrices $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$ inversibles est encore inversible et on a $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*
3. *Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$ alors A^{-1} est inversible et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.*

Théorème 1
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Notons $C_1, \dots C_n$ les colonnes de A et $L_1, \dots, L_n$ ses lignes.

On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} A \in GL_n(\mathbb{K}) &\iff A \underset{L}{\sim} I_n \text{ (équivalente par ligne)} \iff A \underset{C}{\sim} I_n \\ &\iff (C_1, \dots C_n) \text{ est une base de } M_{n,1}(\mathbb{K}) \\ &\iff (L_1, \dots L_n) \text{ est une base de } M_{1,n}(\mathbb{K}) \\ &\iff \operatorname{rg}(A) = n \iff \ker(A) = \{0_{\mathbb{K}^n}\} \\ &\iff \forall Y \in \mathbb{K}^n \exists! X \in \mathbb{K}^n \ AX = Y \\ &\iff \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) AB = I_n \end{aligned}$$

II Trace

II.1 Trace d'une matrice

Définition 2
*Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle la trace de A et on note $\operatorname{Tr}(A)$ le **nombre** $\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$ qui est la somme de ses coefficients diagonaux.*

Proposition 4
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. $\operatorname{Tr}({}^t(A)) = \operatorname{Tr}(A)$
2. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \ \operatorname{Tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \operatorname{Tr}(A) + \beta \operatorname{Tr}(B)$.

Ainsi la trace est une forme linéaire : $\operatorname{Tr} \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$

II.2 Trace d'un endomorphisme

Théorème 2
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$$

Définition-Proposition 1
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$. Le scalaire $\operatorname{Tr}(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ de E choisie pour calculer la matrice. On le note $\operatorname{Tr}(f)$.

III Déterminant

III.1 Déterminant de taille n

Définition-Proposition 2
Il existe une unique application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ telle que

1. $\det(I_n) = 1$
2. $\det$ *est linéaire par rapport à chaque colonne.*
3. $\det$ *est anti-symétrique ie change de signe si on échange deux colonne de sa variable.*

Proposition 5
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On fait subir une opération élémentaire sur les colonnes de A et on note A' la matrice obtenue.

1. *Si l'opération est $C_i \leftrightarrow C_j$ avec $i \neq j$ alors $\det(A') = -\det(A)$.*
2. *Si l'opération est $C_i \leftarrow \lambda C_i$ avec $\lambda \neq 0$ alors $\det(A') = \lambda \det(A)$*
3. *Si l'opération est $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ alors $\det(A') = \det(A)$.*

Corollaire 1
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$

Théorème 3
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est inversible ssi $\det(A) \neq 0$.

Proposition 6
Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux.

III.2 Propriétés calculatoires

Théorème 4
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\det(A) = \det({}^tA)$.

Théorème 5
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geqslant 2$, $A = (a_{i,j})^2_{(i,j)\in[\![1,n]\!]}$. Pour $i, j \in [\![1,n]\!]^2$ on note $A_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ déduite de A en supprimant la ième ligne et la ième colonne.

1. $\det(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det A_{i,j}$ *(développement par rapport à la jème colonne)*
2. $\det(A) = \sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det A_{i,j}$ *(développement par rapport à la ième ligne)*

Corollaire 2
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$.

Théorème 6
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Corollaire 3
Si A est inversible alors $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

III.3 Déterminant et espace vectoriel

Définition 3
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ une famille de n vecteurs. Soit $\mathcal{B}$ une base. On appelle déterminant de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$ le nombre $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n))$.

Proposition 7
Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une famille de n vecteurs.

$$\mathcal{B}' \text{ est une base de } E \text{ ssi } \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \neq 0$$

Théorème 7
Deux matrices carrées semblables ont le même déterminant.

Définition 4
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n. Toutes les matrices de f (ie dans n'importe quelle base) ont le même déterminant, on le note $\det(f)$ et on l'appelle déterminant de f.

Proposition 8
Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension n.

1. $\det(Id_E) = 1$
2. *Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$.*
3. $\det(f \circ g) = \det(f)\det(g)$
4. *f est bijective (on dit aussi inversible) ssi $\det(f) \neq 0$ et alors $\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}$.*