Partie I

1. (a)

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$$
$$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \sin b\cos a$$

Donc
$$\boxed{\sin a\cos b = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b)+\sin(a-b)\right).}$$

(b) Pour $t\in\mathbb{R}$ on a

$$S_n(t)+i\Sigma_n(t) = \frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n} e^{ikt} = \sum_{k=0}^{n} e^{ikt}-\frac{1}{2}$$

Ainsi si $t=2k\pi$ pour un $k\in\mathbb{Z}$ alors $\boxed{S_n(t)+i\Sigma_n(t)=n+\frac{1}{2}}$. Dans les autres cas on a

$$S_n(t)+i\Sigma_n(t) = \frac{e^{i(n+1)t}-1}{e^{it}-1}-\frac{1}{2} = \frac{2ie^{i\frac{n+1}{2}t}\sin(\frac{n+1}{2}t)}{2ie^{i\frac{t}{2}}\sin(\frac{t}{2})}-\frac{1}{2}$$

et donc

$$\boxed{S_n(t)+i\Sigma_n(t) = e^{i\frac{n}{2}t}\frac{\sin(\frac{(n+1)t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}-\frac{1}{2}}$$

(c) Pour $t\neq 2k\pi$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$, on en déduit (le quotient de sinus est réel) que $S_n(t) = \frac{\cos(\frac{nt}{2})\sin(\frac{(n+1)t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}-\frac{1}{2} = \frac{2\cos(\frac{nt}{2})\sin(\frac{(n+1)t}{2})-\sin(\frac{t}{2})}{2\sin(\frac{t}{2})}$. En appliquant la première question il vient

$$\boxed{S_n(t) = \frac{\sin(\frac{(2n+1)t}{2})}{2\sin(\frac{t}{2})}.}$$

Pour $t=2k\pi$ pour un $k\in\mathbb{Z}$ on a $S_n(t)=n+\frac{1}{2}$.
Remarquons que S_n est continue sur $\mathbb{R}$ par somme sous sa première expression et continue en 0 sous sa deuxième expression en utilisant $\sin(u)\underset{u\to 0}{\sim} u$.

(d) On a alors (intégrale impropre convergente par prolongement par continuité)

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} S_n(t)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}+\int_0^{\pi}\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)\mathrm{d}t$$

Par linéarité de l'intégrale et en observant que pour $k\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$ on a $\int_0^{\pi}\cos(kt)\mathrm{d}t=0$, l'intégrale demandée vaut $\boxed{\frac{\pi}{2}}$

2. (a) Par inverse d'un fonction qui ne s'annule pas et par somme, $f\in\mathcal{C}^1(]0,\pi],\mathbb{R})$.
De plus, $\frac{1}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}-\frac{1}{t} = \frac{1}{t+o_0(t^2)}-\frac{1}{t} = \frac{1}{t}\frac{1}{1+o_0(t)}-\frac{1}{t} = \frac{1}{t}(1+o_0(t))-\frac{1}{t} = o_0(1)$ car $\frac{1}{1+u}\underset{u\to 0}{\sim} 1-u+o_(u)$.
Ainsi f est bien continue en 0.
De plus, pour $t\in]0,\pi]$, $f'(t) = \frac{-\cos(\frac{t}{2})}{4\sin^2(\frac{t}{2})}+\frac{1}{t^2}$.
Or $\frac{1}{4\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{1}{t^2-\frac{t^4}{12}+o_0(t^4)} = \frac{1}{t^2}\frac{1}{1-\frac{t^2}{12}+o_0(t^2)} = \frac{1}{t^2}(1+\frac{t^2}{12}+o_0(t^2)) = \frac{1}{t^2}+\frac{1}{12}+o_0(1)$.
Ainsi $f'(t) = -\left(1-\frac{t^2}{8}+o_0(t^2)\right)\left(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{12}+o_0(1)\right)+\frac{1}{t^2} = -(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+o_0(1))+\frac{1}{t^2} = \frac{1}{24}+o_0(1)$.
Finalement f' possède une limite finie en 0 et $\boxed{f \text{ est bien de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0,\pi]}$ d'après le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$ (on a même $f'(0)=\frac{1}{24}$).

(b) f' étant $\boxed{\text{continue sur un segment}}$, elle est bornée et atteint ses bornes.

3. (a) g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ par quotient dont le dénominateur ne s'annule pas.
De plus, pour $t\in]0,\frac{\pi}{2}[$, $g'(t)=\frac{t\cos(t)-\sin(t)}{t^2}$. Il faut étudier le signe de ce numérateur.
La première méthode consiste à étudier une fonction. Passons.
Remarquons plutôt que pour $x\in]0,t[$, $\tan'(x)\geqslant 1$ et donc d'après l'inégalité des accroissements finis appliquée à tan qui est continue et dérivable sur $[0,t]$, $1\times(t-0)\leqslant\tan(t)-\tan(0)$ donc $t\leqslant\tan(t)$ et comme $\cos(t)>0$, $\sin(t)\leqslant t\cos(t)$.
Finalement, $\boxed{g \text{ est décroissante.}}$

(b) Remarquons d'abord que g est prolongeable par continuité en 0 et $\frac{\pi}{2}$ (via l'équivalent du cours, pour 0). On a ainsi, pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\frac{2}{\pi} \leqslant g(t) \leqslant 1$ (ce sont les valeurs des limites) et donc pour tout $t \in]0, \pi[$

$$\frac{4}{\pi^2} \leqslant g^2\left(\frac{t}{2}\right) \leqslant 1$$

car g est à valeurs positives.
Ainsi, par croissance de l'intégrale (impropre, convergente par prolongement par continuité), $\int_0^\pi \frac{4}{\pi^2} \mathrm{d}t \leqslant \int_0^\pi \frac{4}{t^2} \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \leqslant \int_0^\pi 1 \mathrm{d}t$ d'où l'inégalité demandée en divisant par 2.