Table des matières

I Séries convergentes

I.1 Vocabulaire

I.1.1 Définition
Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite.

1. *On appelle série de terme général u_n et on note $\sum u_n$ ou $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ la suite (S_N) définie par*
$$\forall N \in \mathbb{N}\ S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$$
On dit que S_N (le nombre) est la Nième somme partielle de cette série.
Il est possible de commencer à sommer non pas à l'indice 0 mais à un indice entier fixé n_0 (ce qui revient à poser $u_n = 0$ pour $n \in [\![0, n_0 - 1]\!]$). Dans ce cas la série est notée $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$.
2. *On dit que la série $\sum u_n$ converge ssi la suite des somme partielles converge. Dans le cas contraire, on dit que la série diverge.*
Quand elle existe, on note $S = \sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ la limite des sommes partielles et on l'appelle somme de la série.
3. *Dans le cas d'une série convergente, la suite des restes de la série est la suite définie par $R_N = \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} u_n = S - S_N$*

I.1.2 Complexes

Comme d'habitude, il est suffisant d'étudier les séries des parties réelles et imaginaires $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

I.1.3 Modifier une série

On ne change pas la nature convergente ou divergente d'une série en modifiant les k premières valeurs de u_n pour un k fixé. Par contre on modifie la valeur de la somme...

I.1.4 Définition-Proposition
Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
SI *$u_n \nrightarrow 0$* ***ALORS*** *$\sum u_n$ diverge.*
Dans ce cas on dit que $\sum u_n$ diverge grossièrement.

I.1.5 Utilisation

Ce résultat n'a qu'une seule utilité : prouver qu'une suite diverge. La contraposée est : si $\sum u_n$ converge alors $u_n \to 0$.
Exemple : montrer que $\sum \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ diverge.

I.1.6 Proposition
Considérons 2 séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.
- *Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ $\sum (\lambda u_n + \mu v_n)$ converge.*
- *Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge alors $\sum (u_n + v_n)$ diverge.*
- *Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, on ne peut rien dire sur $\sum (u_n + v_n)$.*

I.2 Séries de référence

I.2.1 Séries convergentes

1. Soit $q \in \mathbb{C}$. $\sum q^n$ converge ssi $|q| < 1$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$.

I.2.2 Série divergente

La série $\sum \frac{1}{n}$ est une série divergente appelée série harmonique.

I.2.3 Séries télescopiques

Exemple : Calculer la somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

I.2.4 Taylor

Soit $x \in \mathbb{R}$. La formule de Taylor avec reste intégral appliquée à l'ordre n à exp entre 0 et x (exp est de classe $n+1$ sur ce segment) donne

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \mathrm{d}t$$

Ainsi $\left| e^x - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant \frac{1}{n!} \left| \int\limits_0^x |(x-t)^n e^t| \mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{1}{n!} \left| \int\limits_0^x |x|^n e^t \mathrm{d}t \right| = \frac{|x|^n (e^x - 1)}{n!}$.

Par croissances comparées, $\frac{|x|^n}{n!} \underset{n \to +\infty}{\to} 0$ et donc $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$.

I.3 Séries à termes positifs

I.3.1 Théorème
Soit $(u_n)_n$ une suite de réels ***positifs****. $\sum u_n$ converge ssi la suite des sommes partielles est majorée.*

Dans ce cas, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \sup\left(\left\{ \sum\limits_{k=0}^{N} u_n \middle|\ N \in \mathbb{N} \right\}\right)$.

I.3.2 Théorème
Soient $(u_n)_n, (v_n)_n$ des suites de réels positifs.

1. *Si $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.*
2. *Si $u_n = O_{+\infty}(v_n)$ et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.*
3. *Si $u_n = o_{+\infty}(v_n)$ et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.*
4. *Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont la même nature.*

Les résultats 2, 3 et 4 restent vrais pour des séries à termes négatifs.

I.3.3 $n^\alpha u_n$

Soit $(u_n)_n$ une suite de réels positifs et $\alpha > 1$

1. Si on a $n^\alpha u_n \underset{n \to +\infty}{\to} 0$ alors $\sum u_n$ converge.

   On a en effet $u_n = o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ dans ce cas.
2. Si on a $n^\alpha u_n \underset{+\infty}{\to} \ell \neq 0$ alors $\sum u_n$ converge car $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ell}{n^\alpha}$ qui est un terme général de signe constant d'une série convergente.

I.3.4 Attention

L'hypothèse $(u_n), (v_n)$ positives est fondamentale. On peut avoir $u_n \underset{v_n}{\sim}$, $\sum v_n$ converge et $\sum u_n$ diverge si elle n'est pas respectée.

Pour $n > 1$, posons $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}, v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

1. $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ car $(-1)^n = o_{+\infty}(\sqrt{n})$ (comparaison d'une suite bornée à une suite de limite infinie).
2. Montrons que $\sum v_n$ converge. Posons, pour $N > 1$, $a_N = \sum\limits_{n=2}^{2N} v_n$ et $b_N = \sum\limits_{n=0}^{2N+1} v_n$.

   Alors
   - $b_N - a_N = v_{2N+1} \underset{N \to +\infty}{\to} 0$
   - $a_{N+1} - a_N = -\frac{1}{\sqrt{2N+1}} + \frac{1}{\sqrt{2N+2}} \leqslant 0$ donc (a_N) est décroissante.
   - $b_{N+1} - b_N = \frac{1}{\sqrt{2N+2}} - \frac{1}{\sqrt{2N+3}} \geqslant 0$ donc (a_N) est croissante.

   Finalement, (a_N) et (b_N) sont adjacentes et convergent donc vers une limite commune $l \in \mathbb{R}$. Ainsi les sommes partielles de $\sum v_n$ convergent vers l (leurs suites des termes d'indice pairs et impairs le font).
3. De plus, $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + o_{+\infty}(\frac{1}{n})\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o_\infty(\frac{1}{n\sqrt{n}})$. Ainsi u_n est la somme de 3 termes généraux de séries convergentes et d'un terme général de série divergente de donc $\sum u_n$ diverge.

I.3.5 Divergence

Si on a (u_n) et (v_n) positives :

1. Si $u_n \leqslant v_n$ APCR et $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.
2. Si $u_n = o_{+\infty}(v_n)$ et $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

I.3.6 Application aux suites

Soit $(u_n)_n$ une suite. $(u_n - u_0)$ à la même limite (ou absence de limite) que $\sum (u_{n+1} - u_n)$.
Exemple : $u_n = \ln(\frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}})$.

I.3.7 Théorème (Règle de d'Alembert)
Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n > 0$. Supposons que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell$.

1. *Si $\ell < 1$ alors $\sum u_n$ converge.*
2. *Si $\ell > 1$ alors $\sum u_n$ diverge.*
3. *Si $l = 1$ la série peut être divergente ou convergente.*

I.3.8 Utilisation

1. En général, le calcul de la limite du quotient n'est pas aisé, et en pratique vaut souvent 1...
2. Si l'expression de u_n fait apparaître des quantité $n!$ ou α^n en facteur, la règle de d'Alembert peut être efficace.

I.4 Lien avec l'intégrale

I.4.1 Théorème
Soit $f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ (avec $n_0 \in \mathbb{N}$) une fonction ***continue, positive et décroissante.***

$$\int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt \text{ et } \sum_{n \geqslant n_0} f(n) \text{ ont la même nature}$$

Preuve.
Pour un $N > n_0$ on a, (faire un schéma), $\int_{n_0+1}^{N+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=n_0}^{N} f(n) \leqslant \int_{n_0}^{N} f(t)\mathrm{d}t$.

Ainsi la suite des sommes partielle est majorée ssi $x \mapsto \int_{n_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ est majorée (il suffit de majorer les valeurs aux entiers car cette fonction est croissante). ■

I.4.2 Exemple
On prouve de cette manière la convergence et la divergence des séries de Riemann.

I.4.3 Exemple
Déterminer suivant les valeurs de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la nature de la série $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$.

I.4.4 Application aux séries divergentes

Remarquons que dans le cas de f continue, positive et décroissante, $f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f \leqslant f(n-1) \times 1$ Ainsi $0 \leqslant \int_{n-1}^{n} f - f(n) \leqslant f(n-1) - f(n)$ et par somme télescopique, $\sum \left(\int_{n-1}^{n} f - f(n) \right)$ converge (elle est majorée par $f(n_0)$).

I.4.5 Exemple
En utilisant une comparaison série-intégrale, montrons qu'il existe une constante γ telle que $H_n = \ln(n) + \gamma + o_{+\infty}(1)$ où H_n représente la $n$ième somme partielle de la série harmonique.

Soit $k > 0$. Pour $t \in [k, k+1]$ on a $\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k}$ donc $\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$ par croissance de l'intégrale. Ainsi $0 \leqslant (\ln(k+1) - \ln(k)) - \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ et la série $\sum \left((\ln(k+1) - \ln(k)) - \frac{1}{k+1} \right)$ converge (somme télescopique). Notons ℓ sa limite.

on a maintenant $\sum_{k=1}^{n-1} \left((\ln(k+1) - \ln(k)) - \frac{1}{k+1} \right) = \ell + o(1)$ ie $\ln(n) - (H_n - 1) = \ell + o(1)$.

II Convergence absolue

II.1 Convergence d'une série complexe

II.1.1 Définition
Soit $\sum u_n$ une série complexe. On dit que cette série est absolument convergente ssi $\sum_{n \geqslant 0} |u_n|$ converge (prononcer module ou valeur absolue suivant les cas).

Explication On regarde en fait la convergence d'une série positive, pour laquelle tous les théorèmes précédent s'appliquent.

II.1.2 Théorème
Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Si $\sum u_n$ converge absolument alors $\sum u_n$ converge et on a

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

Preuve.

— Cas réel.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^+ = \max(u_n, 0)$ et $u_n^- = \max(-u_n, 0)$. C'est à dire que u_n^+ est u_n si $u_n \geqslant 0$ et 0 sinon. u_n^- est $|u_n|$ si $u_n \leqslant 0$ et 0 sinon.

Ainsi ces deux nombres sont positifs et on a $u_n = u_n^+ - u_n^-, |u_n| = u_n^+ + u_n^-$.

On pose pour $N \in N$, $S_n = \sum_0^N u_n$ et $S'_n = \sum_0^N |u_n|$.

On sait que $S'_N \underset{+\infty}{\to} l \in \mathbb{R}^+$. Or $S'_N = \sum_0^N u_n^+ + \sum_0^N u_n^-$. Ces deux dernières sommes sont à termes positifs et majorées par l donc les séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ convergent.

Ainsi $\sum u_n$ converge par différence de série convergente.

— Cas complexe.

Cette fois on pose $u_n = x_n + iy_n$ et on sait que $\sum |x_n + iy_n|$ converge.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $|x_n| \leqslant |u_n|$ et $|y_n| \leqslant |u_n|$ donc les séries $\sum x_n$ et $\sum y_n$ convergent absolument donc convergent par le point précédent.

Ainsi la combinaison linéaire $\sum x_n + iy_n$ converge. ∎

II.1.3 Méthode obligatoire

Pour étudier une série complexe ou une série dont le signe n'est pas constant, on étudiera toujours d'abord la convergence absolue.

II.1.4 Exemple
Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n!}$ converge.

II.1.5 Série exponentielle

Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ converge.

II.1.6 Attention

La réciproque est fausse. Par exemple la série $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$ converge, mais ne converge pas absolument.

Pour le voir, prenons $x \neq 1$ et notons que $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}$. En intégrant sur $[-1, 0]$ on obtient $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} = ln(2) - \int\limits_{-1}^{0} \frac{x^{n+1}}{1-x}\mathrm{d}x$. Or $0 \leqslant \frac{x^{n+1}}{1-x} \leqslant x^{n+1}$ et par croissance de l'intégrale $0 \leqslant \int\limits_{-1}^{0} \frac{x^{n+1}}{1-x}\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n+1}$.

Finalement, $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2)$.

II.2 Propriétés

II.2.1 Proposition
Soient $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ avec $\forall n \in \mathbb{N} v_n \geqslant 0$.

1. *Si $|u_n| \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.*
2. *Si $u_n = O_{+\infty} v_n$ et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.*
3. *Si $u_n = o_{+\infty} v_n$ et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.*

II.2.2 Théorème
Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries de complexes absolument convergente.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Alors la série $\sum c_n$ converge absolument et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \times \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$

Preuve.

— On considère pour commencer que (a_n) et (b_n) sont des suite réelles positives.

Notons, pour $N \in \mathbb{N}$, $A_N = \sum\limits_{n=0}^{N} a_n, B_N = \sum\limits_{n=0}^{N} b_n, C_N = \sum\limits_{n=0}^{N} c_n = \sum\limits_{n=0}^{N}\sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Posons de plus $A = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ et $B = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$

Alors $C_N = \sum_{k=0}^{N}\sum_{n=k}^{N} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{N}\left(a_k \sum_{i=0}^{N-k} b_i\right)$. Remarquons de plus que $A_N B_N = \sum_{k=0}^{N} a_k \sum_{i=0}^{N} b_i$

Ainsi $C_N \leqslant A_N B_N \leqslant AB$. La série $\sum c_n$, qui est une série de termes positifs, est majorée et donc converge. On note C sa somme.

Mais on a également

$$C_{2N} = \sum_{k=0}^{N}\left(a_k \sum_{i=0}^{2N-k} b_i\right) + \sum_{k=N+1}^{2N}\left(a_k \sum_{i=0}^{2N-k} b_i\right) \geqslant \sum_{k=0}^{N}\left(a_k \sum_{i=0}^{N} b_i\right) = A_N B_N$$

la majoration étant valable car on retranche des termes positifs.

Finalement, $C_N \leqslant A_N B_N \leqslant C_{2N}$ et par passage à la limite ($N \to +\infty$, les limites existent) on obtient bien $C = AB$.

— Revenons maintenant au cas général.

On note en plus, $c'_n = \sum_{k=0}^{n} |a_k||b_{n-k}|$, $A'_N = \sum_{n=0}^{N} |a_n|, B'_N = \sum_{n=0}^{N} |b_n|, C'_N = \sum_{n=0}^{N} |c_n|$ et A', B', C' les sommes de ces 3 séries (A', B' existent par hypothèse, C' d'après le cas réel positif).

On a, d'après le point précédent, $A'_N B'_N - C'_N \underset{N\to+\infty}{\to} 0$.

De plus, $|C_N| \leqslant C'_N \leqslant C'$ par inégalité triangulaire et donc $\sum c_n$ converge absolument (série à termes positifs majorée) et on note encore C sa somme (l'existence de C n'est pas nécessaire à la suite du raisonnement).

D'après les calculs du premier point, $A_N B_N - C_N$ est une somme $\sum_{(i,j)\in E} a_i b_j$ où $E \subset [\![0, N]\!]^2$ (qui représente les termes restant après simplification, ie. ceux qui n'apparaissent pas dans C_N), on a $|A_N B_N - C_N| \leqslant \sum_{(i,j)\in E} |a_i b_j| = A'_N B'_N - C'_N$. Par encadrement, $A_N B_N - C_N \underset{N\to+\infty}{\to} 0$ donc $C = AB$. ∎

II.2.3 Exemple

Posons pour $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$. Montrer que $\forall a, b \in \mathbb{C}\ f(a+b) = f(a)f(b)$.

II.3 Approximations et restes

II.3.1 Valeur approchée de la limite

Supposons que $\sum u_n$ converge vers S.

Alors pour $N \in \mathbb{N}$, $|S - S_N| = |R_N| = \left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n\right|$. Si on sait majorer les restes d'une série convergente, alors on connaît un minorant de la qualité de l'approximation ainsi que de la vitesse de convergence d'une suite.

II.3.2 Riemann

Soit $\alpha > 1$ un réel.

Montrons que $R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{N^{\alpha-1}}$.

II.3.3 Séries géométries

On connaît une expression explicite du reste.

Si on a maintenant une suite vérifiant $|u_{n+1}| \leqslant k|u_n|$ pour un $k \in]0,1[$, montrons que $|R_N| \leqslant \frac{|u_{N+1}|}{1-k}$