Devoir maison n°4

A rendre le 23/11.

I Polynôme et intégrales

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que l'intégrale $\int\limits_0^{+\infty} P(t)e^{-t}\mathrm{d}t$ converge.
2. Pour $k \in \mathbb{N}$ on pose $I_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\mathrm{d}t$.
   (a) Calculer I_0.
   (b) Donner un lien entre I_{k+1} et I_k (NDT : attention à la rédaction). En déduire (proprement, encore une fois) que $I_k = k!$
3. On considère $\varphi_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & \int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}\mathrm{d}t \end{array} \right.$ pour $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ fixé.
   (a) Montrer que φ est une forme linéaire.
   (b) Donner une base $\mathcal{B}_n$ de $\mathbb{R}_n[X]$ et une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}$ et calculer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_n,\mathcal{B}}(\varphi_n)$.
   (c) Quelle est la dimension de $\ker(\varphi_n)$?

II Autour de la trace

Posons $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

1. On note $F = \{AB - BA|\ (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2\}$.
   (a) Donner un exemple explicite d'une matrice non nulle de F dans le cas $n = 2$.
   (b) Montrer que $F \subset \ker(\mathrm{tr})$.
   (c) On note $E_{i,j}$ les matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Calculer $E_{i,j}E_{k,l}$ pour $i,j,k,l \in [\![1,n]\!]$.
   (d) Soient $i,j \in [\![1,n]\!]$ des entiers distincts. Montrer que $E_{i,i} - E_{j,j}$ et $E_{i,j}$ sont dans F. Qu'en déduire pour la dimension de F ?
   (e) Déterminer $\dim(\ker(\mathrm{tr}))$ et en déduire que $F = \ker(\mathrm{tr})$.
   (f) Est-ce que $I_n \in F$?
2. On note $E = \{f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\mathbb{K})|\ \forall (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2\ f(AB) = f(BA)\}$. Les éléments de E sont ainsi des formes linéaires.
   (a) Montrer que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Donner en plus un élément non nul de E.
   (b) Soit $f \in E$. Montrer que $\ker(\mathrm{tr}) \subset \ker(f)$.
   (c) (*) En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda\,\mathrm{tr}$.
   (d) Déterminer une base et la dimension de E.