Table des matières

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Motivation

Matrices diagonales

Les produits et puissances de matrices sont beaucoup plus aisés sur les matrices diagonales.

Endomorphismes

Nous avons constaté que certains endomorphismes ont une matrice diagonale pour un bon choix de base $\mathcal{B}$.

Traduction sur la base

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B} = (u, v, w)$ une base de E. On suppose que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Traduisons cette hypothèse : $f(u) = 2u, f(v) = -v$ et $f(w) = 3w$.

Noyaux

Poursuivons notre analyse de la situation précédente.

On a u qui vérifie $f(u) - 2(u) = 0_E$ ie $(f - 2Id_E)(u) = 0_E$. Or u fait partie d'une famille libre donc est non nul. Ainsi $\ker(f - 2Id_E) \neq \{0_E\}$, ou encore l'endomorphisme $f - 2Id_E$ n'est pas bijectif.

De même $f + Id_E$ et $f - 3Id_E$ ne sont pas bijectifs.

I Elements propres

I.1 Valeurs propres

Définition 1
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

*Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est une valeur propre de f ssi il existe un $x \in E$ **non nul** tel que $f(x) = \lambda x$. Un tel x **non nul** est appelé un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.*

L'ensemble des valeurs propres de f est appelé le spectre de f et noté $Sp(f)$.

I.2 Espaces propres

Définition 2
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de E. L'espace propre associée à λ est l'espace $E_\lambda(f) = \ker(f - \lambda Id_E) = \ker(\lambda Id_E - f) \neq \{0_E\}$.

Il s'agit de l'ensemble composé du vecteur nul et de tous les vecteurs propres associés à λ. On le note parfois aussi E_λ.

Théorème 1
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1, \ldots \lambda_p$ des valeurs propres 2 à 2 distinctes de f. Pour $i \in [\![1, p]\!]$ on pose v_i un vecteur propre associé à λ_i (il est donc non nul).

La famille $(v_1, \ldots, v_p)$ est libre.

Théorème 2
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1, \ldots \lambda_k$ des valeurs propres 2 à 2 distinctes de f.

La somme $\sum_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}(f)$ est directe.

I.3 Stabilité ($\star$)

Proposition 1
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de f. Alors $E_\lambda(f)$ est stable par f.

Proposition 2
Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$.

1. $\ker(f)$ *et* $\mathrm{Im}(f)$ *sont stables par* g.
2. *Tout espace propre de* f *est stable par* g.

Evidemment, on peut échanger les rôles de f et g dans ces résultats.

II En dimension finie

II.1 Extension aux matrices

Définition 3
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les valeurs propres et vecteurs propres de A sont les valeurs propres et vecteurs propres de l'application linéaire canoniquement associée à A, $f_A : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K}^n \\ X & \mapsto & AX \end{array} \right.$

On note $Sp(A) = Sp(f_A)$ et les espaces propres sont notés $E_\lambda(A)$.

II.2 Polynôme caractéristique

Définition-Proposition 1
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le polynôme caractéristique de A est le polynôme χ_A associée à la fonction $\chi_A : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \det(xI_n - A) \end{array} \right.$.

χ_A est un polynôme unitaire (son coefficient dominant est 1) de degré n.

Proposition 3
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le coefficient constante de χ_A est $(-1)^n \det(A)$ et le coefficient de X^{n-1} est $\mathrm{Tr}(A)$.

Ce résultat est également valable pour les endomorphismes.

Définition 4
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Le polynôme caractéristique χ_f de f est le polynôme associé à l'application $x \mapsto \det(xf - Id_E)$. C'est un polynôme unitaire de degré n.

Si A est la matrice de f dans une base $\mathcal{B}$ quelconque de E alors $\chi_f = \chi_A$.

II.3 Lien avec les valeurs propres

Théorème 3
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$

1. *λ est une valeur propre de f ssi $\chi_f(\lambda) = 0$ ie λ est une racine de χ_f.*
2. *λ est une valeur propre de A ssi $\chi_A(\lambda) = 0$ ie λ est une racine de χ_A.*

Corollaire 1
Tout endomorphisme de E possède n valeurs propres dans $\mathbb{C}$ (comptées avec multiplicité).

Proposition 4 (Déterminant triangulaire par bloc)
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la forme $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où A, C sont des matrices carrées (de tailles quelconques, y compris 1). Alors $\det(M) = \det(A)\det(C)$.

Théorème 4
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in Sp(f)$. Notons $\mu(\lambda)$ la multiplicité de λ comme racine de χ_f (on appelle cette quantité la multiplicité de la valeur propre λ).

$$1 \leqslant \dim(E_\lambda(f)) \leqslant \mu(\lambda)$$

III Diagonalisation

III.1 Diagonalisabilité

Définition 5

1. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est **diagonalisable** ssi il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale.*
2. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est diagonalisable ssi son application linéaire canoniquement associée est diagonalisable ssi A est semblable à une matrice diagonale.*

Proposition 5
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. f est diagonalisable ssi il existe une base $\mathcal{B}$ de E composée de vecteurs propres de f.

Dans ce cas $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale et sa diagonale est composée des valeurs propres de f associées aux vecteurs propres de $\mathcal{B}$.

Théorème 5
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. f est diagonalisable ssi $\displaystyle\bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda = E$.

Théorème 6
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

f est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ ssi χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et pour tout $\lambda \in Sp(f)$ $\dim(E_\lambda) = \mu(\lambda)$ (la multiplicité de λ en tant que racine de χ_f).

Proposition 6
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. SI χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et à racines simples ALORS f est diagonalisable.

III.2 Applications

Théorème 7
Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ *une suite et* $p \geqslant 1$. *On suppose qu'il existe* $a_0, \ldots, a_{p-1} \in \mathbb{K}$ *tels que* $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+p} = \sum_{k=0}^{p-1} a_k u_{n+k}$.

1. *Le polynôme* $P = -\sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k + X^p$ *est appelé polynôme caractéristique de* (u_n).
2. *Si* P *est scindé à racines simples, notées* $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ *alors il existe des scalaires* $\alpha_1, \ldots \alpha_p$ *tels que*
$$\forall n \in \mathbb{N}\ u_n = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \lambda_k^n$$
.

IV Trigonalisation

IV.1 Théorie

Théorème 8
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. χ_f *est scindé sur* $\mathbb{K}$ *ssi il existe une base* $\mathcal{B}$ *telle que* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ *est triangulaire supérieure (on dit que* f *est trigonalisable).*

La diagonale est constituée de toutes les racines de χ_f, *avec multiplicité (une racine de multiplicité* r *apparaît* r *fois sur cette diagonale).*

Corollaire 2
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *Alors* A *est trigonalisable dans* $\mathbb{C}$ *ie il existe* $P \in GL_n(\mathbb{C})$ *telle que* PAP^{-1} *est triangulaire supérieure.*

IV.2 Conséquences pratiques

Proposition 7
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ *et* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *les racines (complexes) de* χ_f *non nécessairement distinctes.*

1. $\mathrm{Tr}(f) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$
2. $\det(f) = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k$

Le même résultat vaut pour les matrices.