Révisions sur les suites

Exercice 1

Trouver une suite (u_n) divergente et telle que $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers 0.

Exercice 2

On pose $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n^2}$.

Etudier la convergence de (u_n).

Exercice 3

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n - \cos(x) \end{array} \right.$

1. Montrer que f_n s'annule une unique fois en un nombre a_n.
2. Etudier la convergence de (a_n). On note ℓ sa limite.
3. Bonus : trouver un équivalent de $a_n - \ell$.

Exercice 4

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\mathrm{d}t$.

1. Montrer que pour $n \geqslant 2$ on a $I_n = \frac{n-1}{n}$.
2. Pour $p \in \mathbb{N}$, donner une expression simple de I_{2p} et I_{2p+1}.
3. Montrer que (I_n) est croissante.
4. Montrer que $((n+1)I_nI_{n+1})$ est constante et en déduire un équivalent simple de I_n.

Convergence

Exercice 5

Déterminer la nature des séries de terme général :

1. $u_n = \frac{1}{2+\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)}$.
2. $u_n = \frac{1}{n^2\ln(n)}$.
3. $u_n = 2^{-\ln(\ln(n))}$
4. $u_n = \ln(\cos(\frac{1}{n}))$

Exercice 6

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $u_n = \ln\left(\frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}\right)$. Montrer que (u_n) converge.

Question bonus : en utilisant l'exercice 4, en déduire un équivalent de $n!$.

Calcul de sommes

Exercice 7

Déterminer la nature et calculer la somme des séries de terme général :

1. $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.
2. $u_n = \frac{n}{2^n}$
3. $u_n = \frac{n^2+n+1}{n!}$
4. $u_n = e^{-2n}\operatorname{ch}(n)$

Pour 3, on pourra utiliser la base $(1, X, X(X-1))$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 8

Montrer que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge et exprimer sa somme en fonction de $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 9

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer la convergence puis calculer la somme de $\sum_{n\geqslant 0} \frac{\sin(nx)}{2^n}$

Exercice 10

1. Trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\ u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}$.
2. En déduire que $\sum u_n$ converge et calculer sa somme.

Plus théorique

Exercice 11

Pour $N \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, on pose $H_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{N}$.

1. Montrer que $\sum_{n\geqslant 2} \left((\ln(n) - \ln(n-1)) - \frac{1}{n}\right)$ converge.
2. En déduire que $H_n = \ln(n) + \gamma + o_0(1)$ où $\gamma \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 12

Soit (a_n) une suite positive telle que $\sum a_n$ converge. Etudier la convergence des séries $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}, \sum a_n^2, \sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$.

Exercice 13

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs positives et $u_n > 0$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{a_n}{u_n}$.

Montrer que (u_n) converge ssi $\sum a_n$ converge.

Exercice 14

Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer $\frac{(-1)^n}{n+1}$ comme l'intégrale d'une fonction simple. Montrer alors que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n+1}$ converge et calculer sa somme.