I Algèbre linéaire

1. Ecrire la matrice d'une famille dans une base.
2. Ecrire la matrice d'une application linéaire dans une base.
3. Calculer un noyau, interpréter sa dimension en terme de rang.
4. Calculer la trace d'un endomorphisme, son déterminant (et savoir qu'ils ne dépendent pas de la base choisie).

Exercice 1
Soit $\varphi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & P + X^2 P(0) + XP'(0) + P''(0) \end{array} \right.$. Calculer la matrice de φ dans la base canonique, $\det(\varphi)$ et $\operatorname{tr}(\varphi)$.

Calculer $\ker(\varphi - 2Id_{\mathbb{R}_2[X]})$.

Exercice 2
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Est-ce que l'application $f_\alpha : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} \alpha x + 2y \\ 5x + (\alpha - 3)y \end{pmatrix} \end{array} \right.$ est bijective ?

Calculer son image et son noyau.

II Analyse

II.1 Intégrales

1. Identifier si une intégrale est impropre ou non, connaître la définition d'une intégrale convergente.
2. Utiliser le théorème de comparaison des fonctions positives pour prouver la convergence d'une intégrale.
3. Utiliser un changement de variable bijectif et $\mathcal{C}^1$ pour prouver la convergence.
4. Utiliser un prolongement par continuité pour prouver la convergence.
5. Appliquer une intégration par parties : éviter les bornes où l'intégrale est impropre avant d'avoir prouvé les convergences.

Exercice 3
Prouver la convergence et calculer $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+4} \mathrm{d}t$

Exercice 4
Etudier la convergence de l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{1-t} \mathrm{d}t$.

Exercice 5
Etudier la convergence de l'intégrale $\int\limits_0^1 \frac{1}{\ln(t)} \mathrm{d}t$

Exercice 6
Etudier la nature de

1. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}\ln(t)} \mathrm{d}t$
2. $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}\ln(t)} \mathrm{d}t$
3. $\int\limits_0^{+\infty} t^2 e^{(-t^2)} \mathrm{d}t$
4. $\int\limits_0^{+\infty} x^{(-x)} \mathrm{d}x$

II.2 Séries

1. Savoir appliquer le théorème de comparaison des séries positives.
2. Savoir appliquer le théorème de d'Alembert (sans l'utiliser systématiquement).