Devoir surveillé n°3

Durée : 4H. Calculatrices interdites. **Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction et la propreté : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.**

Lisez l'énoncé attentivement et en entier **AVANT** de commencer chaque exercice.

Exercice 1 (Question de cours)

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Justifier soigneusement que $\forall p \in \mathbb{N}\ \det(A^p) = (\det(A))^p$.
2. Vrai ou Faux ? Avec justification bien entendu.
   (a) Si $u_n \underset{+\infty}{\to} 0$ alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.
   (b) Si $\int\limits_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ converge en 0 alors f possède une limite finie en 0.
   (c) Pour $z \in \mathbb{C}$, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z^n$ converge si et seulement si $|z| < 1$.
   (d) Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(A) = 0$ ssi les coefficients diagonaux de A sont nuls.

Exercice 2 (Applications directes)
Algèbre

La notation $\mathbb{R}_2[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2.
On note $\mathcal{B} = \left(1, X, X^2\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
On définit les deux applications suivantes :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & \dfrac{1}{2}\left(P\left(\dfrac{X}{2}\right) + P\left(\dfrac{X+1}{2}\right)\right) \end{array} \right.$$

et

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(1). \end{array} \right.$$

1. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$. On admet (voir le cours) que φ est linéaire.
2. Ecrire la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$ en faisant apparaître les calculs intermédiaires.
3. L'application f est elle injective ? surjective ?
4. Calculer le déterminant et la trace de f.
5. Déterminer un base de $\ker(\varphi)$. L'application φ est-elle injective ? surjective ?
6. Justifier que la famille $\mathcal{B}' = (1, -2X + 1, 6X^2 - 6X + 1) = (P_0, P_1, P_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
7. Calculer la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}'$. Préciser les calculs.[1]
8. Que peut-on dire *a priori* sur $\det(M)$ et $\mathrm{tr}(M)$ par rapport à $\det(A)$ et $\mathrm{tr}(A)$? Vérifier que c'est bien le cas !
9. Plus difficile : combinons les applications.
   (a) Montrer par récurrence (détaillée) que $\forall P \in \mathbb{R}_2[X] \forall n \in \mathbb{N} f^n(P) = \frac{1}{2^n} \sum\limits_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)$
   (b) Montrer, en citant correctement le résultat utilisé, que $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(f^n(P)) = \int\limits_0^1 P(t)\mathrm{d}t$.[2]

1. Si M est compliquée, vous vous êtes fourvoyé.
2. Admirez la transition.

Analyse

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ une série convergente. Pour $n \geqslant 0$ on note $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ son reste de rang n.

1. Un premier exemple.
   (a) Justifier que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n}$ converge.
   (b) Calculer r_n.
   (c) Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} r_n$ converge et calculer sa somme.
2. Un deuxième exemple. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n = (-1)^n \int\limits_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x$.
   (a) Montrer que $(I_n)_n$ converge vers 0 (en valeur absolue).
   (b) Calculer pour x convenable $\sum\limits_{k=0}^{n-1} x^k$ puis montrer que $I_n = \ln(2) + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.
   (c) Justifier que $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge et calculer sa somme.
   (d) Pour cette dernière série, exprimer r_n.
   (e) En utilisant une intégration par parties, montrer que $I_n = \frac{(-1)^n}{a(n+1)} + \frac{1}{n^\alpha} u_n$ où $a, \alpha \in \mathbb{R}$ sont à déterminer et (u_n) est une suite bornée.
   (f) Comment traduire en terme de $O_{+\infty}$ le résultat précédent ?
   (g) Montrer que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} r_n$ converge.
   (h) Déterminer la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} r_n$

Exercice 3
Question préliminaire

Soient $(a_n), (b_n), (c_n)$ des suites de réels telles que $\forall n \in \mathbb{N}\ 0 < a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$. On suppose que $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$. Montrer que $c_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$ (et à a_n, par la même occasion).

Partie I

1. Soit $a > 0$. Justifier la convergence **puis** calculer l'intégrale
$$K_a = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{t^2 + a^2}\mathrm{d}t.$$
2. Pour $C \in \mathbb{R}$ on pose
$$J_C = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + C^2\cos^2(x)}\mathrm{d}x.$$
   Est-ce une intégrale impropre ? Montrer que $J_C = \frac{\pi}{2\sqrt{C^2+1}}$ grâce au changement de variable $t = \tan(x)$.
3. Donner un équivalent de J_C quand $C \to +\infty$.

Partie II

Soit β un réel strictement positif. On pose $I_\beta = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^\beta\cos^2(x)}$.

1. Montrer que pour $\beta \leqslant 1$, l'intégrale I_β diverge.
2. On se place maintenant dans le cas $\beta > 1$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose
$$I_{k,\beta} = \int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^\beta\cos^2(x)}$$

(a) Comparer la convergence de la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} I_{k,\beta}$ et de l'intégrale I_β.

(b) Montrer (proprement) que pour $k \in \mathbb{N}$ on a

$$\int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+(k+1)^\beta \pi^\beta \cos^2(x)} \leqslant I_{k,\beta} \leqslant \int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+k^\pi \pi^\beta \cos^2(x)}$$

(c) A quelle condition sur β l'intégrale I_β converge ?

Exercice 4
Soit H l'un des deux ensembles $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{M}_2(H)$ l'ensemble des matrices carrées de taille 2 **à coefficients** dans H.

Partie I

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

1. A quel ensemble (le plus petit possible, $\mathbb{C}$ est une mauvaise réponse) appartiennent $\mathrm{tr}(A)$ et $\det(A)$?
2. Montrer que si $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ alors $A+B$ et $AB \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.
3. Calculer le produit matriciel $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$ en fonction de I_2.

Partie II

1. A quelle condition nécessaire et suffisante portant sur son déterminant, un matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est-elle inversible ? Exprimer alors $\det(A^{-1})$ en fonction de $\det(A)$.
2. Déterminer les inverses et les déterminants des matrices
$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$
3. Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$; $(a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^4$.
Montrer que A admet une matrice inverse A^{-1} et que A^{-1} est, elle aussi, un élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ si, et seulement si, $\det(A) \in \{-1, 1\}$.
Donner dans ce cas l'expression de A^{-1} en fonction de a, b, c, d.
4. Déterminer les couples $(b,c) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $A_4 = \begin{pmatrix} 5 & c \\ b & 1 \end{pmatrix}$ soit de déterminant 1.

Partie III

On note $\mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telles qu'il existe $p \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ vérifiant $A^p = I_2$.
Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$

Pour une telle matrice A, on note $h(A)$ le plus petit entier naturel non nul q tel que $A^q = I_2$. On l'appelle l'ordre de A.

1. Montrer que $h(A)$ existe bien et est unique [3].
2. Montrer que A possède un matrice inverse $A^{-1} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. Quelles sont les valeurs possibles de $\det(A)$?
3. Vérifier que $A^{-1} \in \mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$ et comparer $h(A)$ et $h(A^{-1})$.
4. On admet qu'il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ (éventuellement confondus) tels que $\ker(A - \lambda_i I_2) \neq 0$ pour $i \in [\![1, 2]\!]$. En considérant $X_i \in \ker(A - \lambda_i I_2)\backslash\{0\}$, montrer que $|\lambda_i| = 1$.
5. On a admis en cours que $\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$. Montrer que $\mathrm{tr}(A) \in [\![-2, 2]\!]$.
6. Montrer que $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ appartiennent à $\mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$ et déterminer leurs ordres (question subsidiaire : quelles puissances de C dont forcément égales à I_2 ?). La matrice produit CD appartient-elle à $\mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$?
On note maintenant χ_A le polynôme définit par $\forall \lambda \in \mathbb{C} \chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_2 - A)$ [4]

3. Question plus difficile
4. Oh, surprise...

7. Exprimer χ_A en fonction de $\det(A)$ et $\operatorname{tr}(A)$.
8. Vérifier qu'il y a exactement 10 polynômes distincts possibles pour χ_A
9. Les nombres λ_1 et λ_2 définis à la question 4 se trouvent être les racines de χ_A [5]. Eliminer 4 des cas possibles de la question précédente.
10. On admet que dans les 6 cas restants, on peut trouver P une matrice inversible de taille 2 (à coefficients dans $\mathbb{C}$) telle que $A = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.
    Montrer que pour $q \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ $A^q = I_2 \iff D^q = I_2$.
    Trouver les ordres éventuels dans les 6 cas de χ_A restant.
11. En déduire la valeur du plus petit entier non nul α tel que $\forall A \in \mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$ $A^\alpha = I_2$.

5. Effectivement, on le sait, mais ce n'est pas au programme de ce DS.