

Elements propres

Exercice 1

Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que si λ est valeur propre de f alors λ^k est valeur propre de f^k .
2. Montrer que f est inversible si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de f . Dans ce cas, déterminer les valeurs propres de f^{-1} en fonction de celles de f .
3. Si f est nilpotent, montrer que la seule valeur propre de f est 0.

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Déterminer les éléments propres d'un projecteur de E et de la symétrie associée.

Exercice 3

Soient $f : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \rightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & XP' \end{cases}$ et $\varphi : \begin{cases} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f'' \end{cases}$. Déterminer les éléments propres de f et φ (valeurs propres, espaces propres associés)

Exercice 4

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^p = I_n$ pour un $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Déterminer les valeurs propres possibles de A .

Exercice 5

1. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Si A n'est pas une homothétie et si A n'admet qu'une seule valeur propre, A est-elle diagonalisable ?
2. Dire si les matrices suivantes sont diagonalisables :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Un endomorphisme nilpotent est-il diagonalisable ?

Exercice 6

Déterminer les coefficients inconnus de la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 2 & b' & c' \\ 3 & b'' & c'' \end{pmatrix}$$

pour qu'elle admette pour vecteurs propres $(1, 0, 1)$, $(-1, 1, 0)$ et $(0, 1, -1)$. Quelles sont alors les valeurs propres ?

Exercice 7

Montrer que A et tA ont les mêmes valeurs propres.

Exercice 8

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$. On suppose de plus que A possède n valeurs propres distinctes (et donc...). Montrer que B est diagonalisable via la même base.

Diagonalisabilité

Exercice 9

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est de dimension finie. On suppose que f est diagonalisable et que $Sp(f) = \{0, 1\}$. Montrer que f est un projecteur.

Énoncer un résultat similaire pour les symétries.

Exercice 10

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ? Si oui, déterminer une base de vecteurs propres.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11

Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ on pose $A_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & \frac{n+2}{n} & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix}$

1. Sans calculer de polynôme caractéristique, montrer que 1 et $1 + \frac{1}{n}$ sont valeurs propres de A_n .
2. La matrice A_n est-elle diagonalisable ? Inversible ?
3. On note $B_n = A_1 A_2 \dots A_n$. La matrice B_n est-elle diagonalisable ? Inversible ? Si oui, exhiber B_n^{-1} .

Exercice 12

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = u_2 = 1 \\ u_{n+3} = 45u_n - 39u_{n+1} + 11u_{n+2} \end{cases}$$

Exprimer u_n en fonction de n .

Exercice 13

1. Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

2. Résoudre l'équation $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$. On commencera par donner des solutions¹ puis vérifier que ce sont les seules².

Exercice 14

Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n complexes vérifiant $A = B^2$; les assertions suivantes sont-elles vraies ?

1. Si B est diagonalisable, A l'est aussi.
2. Si A est diagonale, B l'est aussi.
3. Si A est diagonalisable, B l'est aussi.
4. Si $A = \lambda \text{id}$ avec $\lambda \neq 0$ alors B est diagonalisable.
5. (*) Si A est diagonalisable et inversible, B est diagonalisable.

Approfondissement

Exercice 15

A quelles conditions portant sur α, β , la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & 0 & \beta \\ \alpha & \beta & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 16

On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2}$ où $a_{i,j} = \frac{i}{j}$. Montrer que A est diagonalisable. Indication : calculer le rang de A .

Exercice 17

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et $\varphi : \begin{cases} E & \rightarrow E \\ P & \mapsto (X-1)(X-2)P' - 2XP \end{cases}$.

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$.
2. Montrer que si $P \in E$ est vecteur propre de f alors $\deg(P) = 2$.
3. Déterminer les éléments propres de f .

Exercice 18 (Important)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. On note

$$P(f) = \sum_{k=0}^n a_k f^k \text{ (attention à la puissance 0).}$$

1. Plutôt facile
2. Plus difficile

Montrer que si $\lambda \in Sp(f)$ et $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ alors $P(\lambda) = 0_{\mathbb{K}}$. Trouver dans les exercices précédents 2 exemples de ce résultat

Exercice 19

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

1. Calculer A^3 et en déduire les valeurs propres possible de A .
2. Donner les espaces propres de A .
3. Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $M = \begin{pmatrix} c & b & a \\ a & c & b \\ b & a & c \end{pmatrix}$. Diagonaliser M .

Exercice 20

On possède deux urnes. Initialement, il y a deux boules blanches dans U_1 et deux noires dans U_2 . À chaque tirage, on prend une boule dans U_1 et une boule dans U_2 , et on les échange. On appelle X_k le nombre de boules blanches dans U_1 après le k^e tirage. On pose $X_0 = 2$.

1. Que penser de $X_k(\Omega)$, l'ensemble des valeurs possible pour X_k ?
2. On pose

$$Y_k = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_k = 0) \\ \mathbb{P}(X_k = 1) \\ \mathbb{P}(X_k = 2) \end{pmatrix}$$

Trouver une matrice A telle que $Y_{k+1} = AY_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

En déduire l'espérance de X_k .

3. Trouver trois vecteurs propres linéairement indépendants Z_1, Z_2, Z_3 de A puis décomposer Y_0 dans cette base.
4. En déduire la loi de X_k puis les limites quand k tend vers $+\infty$.

Exercice 21

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pour $P \in \mathcal{L}(E)$, on pose $f(P) = X(1-X)P' + nXP$

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$.
2. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de f en résolvant une équation différentielle.
3. f est-elle diagonalisable ?