Table des matières

I Rayon de convergence

I.1 Série entière

Définition 1

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite. Un série entière est une série de la forme $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ où $z \in \mathbb{C}$.

Pour chaque $z \in \mathbb{C}$ on étudie la convergence de la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$. L'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ pour lesquels la série entière converge est appelé domaine de convergence.

Définition 2

On considère deux séries entières $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$.

1. *La série somme $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n + \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ est la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (a_n + b_n) z^n$.*
2. *Le produit de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ par le scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$ est la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \lambda a_n z^n$.*
3. *La série produit est la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} c_n z^n$ où*

$$\forall n \in \mathbb{N}\ c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Définition 3

Soit $R \in \mathbb{R}^+$. On appelle disque ouvert de centre O et de rayon R l'ensemble $D_R = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| < R\}$.

I.2 Convergence d'une série entière

Théorème 1 (Lemme d'Abel)

Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Supposons qu'il existe $r > 0$ tel que $(|a_n| r^n)$ est une suite bornée. Alors pour tout $z \in D_r$ (ie $|z| < r$)

$$|a_n z^n| = O_{+\infty}\left(\left(\frac{|z|}{r}\right)^n\right) \text{ et donc } \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n \textbf{ converge.}$$

Définition-Proposition 1

Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière.

1. *L'ensemble $I = \{r \in \mathbb{R}^+ |\ (|a_n| r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée$\}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ qui commence à 0.*
2. *$R = \sup(I) \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ est appelé **rayon de convergence** de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$*

Théorème 2

Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

1. *Si $|z| < R$ alors la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ converge.*
2. *Si $|z| > R$ alors la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ diverge grossièrement.*
3. *Si $|z| = R$ on ne peut pas conclure.*

I.3 Calcul du rayon de convergence

Proposition 1

Soient $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série de convergence de rayon de convergence R_a et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R_b

1. *Si $a_n = O_{+\infty}(|b_n|)$ alors $R_a \geqslant R_b$ (un cas particulier : $a_n = o_{+\infty}(|b_n|)$).*
2. *Si $|a_n| \underset{+\infty}{\sim} |b_n|$ alors $R_a = R_b$.*

Théorème 3

Soient $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série de convergence de rayon de convergence R_a et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R_b.

1. *Pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$, la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \lambda a_n z^n$ est de rayon de convergence R_a. Le cas $\lambda = 0$ donne un rayon infini.*

2. *Le rayon de convergence R de la série somme vérifie $R = \min(R_a, R_b)$ si $R_a \neq R_b$ et $R \geqslant R_a$ dans le cas $R_a = R_b$.*
3. *Le rayon de convergence R de la série produit vérifie $R \geqslant \min(R_a, R_b)$.*

Proposition 2
Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.

I.4 d'Alembert

Théorème 4 (Règle de d'Alembert)
Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n > 0$. Supposons que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell$.

1. *Si $\ell < 1$ alors $\sum u_n$ converge (on a même $\forall a \in]\ell, 1[\ u_n = o_{+\infty}(a^n)$).*
2. *Si $\ell > 1$ alors $\sum u_n$ diverge grossièrement ($u_n \underset{+\infty}{\to} +\infty$).*
3. *Si $l = 1$ la série peut être divergente ou convergente.*

II Propriétés de la somme, cas réel

Dans cette partie, on note $\sum a_n x^n$ les séries entières et on considère que x est réel (peu importe pour les a_n). Ainsi, si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ est de rayon $R > 0$ on considère la fonction (qui est la somme de la série) $f : \left\{ \begin{array}{ccc}]-R, R[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{array} \right.$.

II.1 Intégration

Théorème 5

Soit $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors f est continue sur $]-R, R[$.

Théorème 6

Soit $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

$$\forall x \in]-R, R[\ \int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$$

Remarquons que les séries entières qui interviennent ici sont de rayon de convergence R exactement d'après 2

Corollaire 1
Sous les mêmes hypothèses que le théorème, on peut calculer, pour $a, b \in]-R, R[$ l'intégrale $\int\limits_a^b f(t)dt$ en intégrant la somme terme à terme.

II.2 Dérivation

Théorème 7
Soit f la somme de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$.

f est dérivable sur $]-R, R[$ et pour $x \in]-R, R[$ on a

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

. Remarquons que la série entière qui définit f' est également de rayon de convergence R.

Théorème 8
Soit f la somme de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$. Alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et les dérivées de f sont obtenues par dérivation terme à terme de la série entière, ou encore

$$\forall k \in \mathbb{N} \forall x \in]-R, R[\ f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} x^n$$

Corollaire 2
Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et f sa somme. Alors $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Corollaire 3
Les coefficients d'une série entière de rayon non nul sont uniques.

Plus précisément, si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n x^n$ sont de rayons non nuls et ont les mêmes sommes pour tout x dans un intervalle de la forme $]-\alpha, \alpha[$ ($\alpha > 0$) alors $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n = b_n$.

III Développement en série entière

III.1 Fonctions développables

Définition 4
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I tel que $0 \in I$ et 0 n'est pas une borne de I. Le ***développement de Taylor*** *de f est la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.*

Définition 5
Soit $f : I \to \mathbb{K}$ où I est intervalle qui contient 0 (et 0 n'est pas une borne de I). On dit que f est ***développable en série entière*** *ssi il existe $r > 0$ et une série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ tels que :*
- $]-r, r[\subset I$
- $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ *est de rayon* $R \geqslant r$
- $\forall x \in]-r, r[\ f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Autrement dit, f est la somme d'une série entière sur une intervalle $]-r, r[\neq \emptyset$ contenu dans I.

La série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ est appelée ***développement en série entière*** *de f.*

III.2 Développements en pratique

Proposition 3
sin *et* cos *sont développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$*

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} \text{ et } \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

Proposition 4
sh *et* ch *sont développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$*

$$\mathrm{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!}x^{2n} \text{ et } \mathrm{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

Proposition 5
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $f_\alpha : x \mapsto (1+x)^\alpha$ est développable en série entière sur $]-1, 1[$ et

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

Si $\alpha \in \mathbb{N}$, le rayon de convergence est $+\infty$ et le développement est en fait une somme finie.

Formulaire

A savoir	
$\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$	$x \in]-1, 1[$
$\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$	$x \in]-1, 1[$
$(1-x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$	$x \in]-1, 1[$
$e^x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$	$x \in \mathbb{R}$
$\sin(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$x \in \mathbb{R}$
$\mathrm{ch}(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$x \in \mathbb{R}$
$\mathrm{sh}(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$x \in \mathbb{R}$
A savoir refaire	
$\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$	$x \in]-1, 1[$
$\arcsin(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{(2n+1)4^n}x^{2n+1}$	$x \in]-1, 1[$
$\arctan(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$	x ∈]-1, 1[