Table des matières

I Rayon de convergence

I.1 Série entière

I.1.1 Définition

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite. Un série entière est une série de la forme $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ où $z \in \mathbb{C}$.

Pour chaque $z \in \mathbb{C}$ on étudie la convergence de la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$. L'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ pour lesquels la série entière converge est appelé domaine de convergence.

I.1.2 Remarque

Comme pour les séries numériques, on peut considérer des séries entières dont le premier terme n'est pas d'indice 0. Pour revenir dans le cadre du cours, on considère que les premiers termes de (a_n) sont nuls. La convergence des séries numériques ne dépend pas de la valeurs des premiers termes (mais la somme oui !).

I.1.3 Rappel

Nous allons beaucoup parler de divergence grossière en ce début de chapitre. Rappelons que si $(b_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est une suite de complexes (ou de réels d'ailleurs, c'est un cas particulier), $b_n \underset{+\infty}{\rightarrow} 0 \iff |b_n| \underset{+\infty}{\rightarrow} 0$.

I.1.4 Exemple

Soit $z \in \mathbb{C}$. On a vu que la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z^n$ converge ssi $|z| < 1$. On peut donc considérer la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z^n$ qui est bien définie sur $D = \{z \in \mathbb{C} | \ |z| < 1\}$. C'est le disque unité ouvert.

On a alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

I.1.5 Définition

On considère deux séries entières $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$.

1. *La série somme $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n + \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ est la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (a_n + b_n) z^n$.*
2. *Le produit de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ par le scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$ est la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \lambda a_n z^n$.*
3. *La série produit est la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} c_n z^n$ où*

$$\forall n \in \mathbb{N} \ c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

I.1.6 Remarque

Si les séries numériques $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ convergent pour une valeur de $z \in \mathbb{C}$, alors la série somme et la série produit par un scalaire convergent aussi pour ce z.

Pour assurer la convergence de la série produit, il faut supposer la convergence absolue des séries numériques.

I.1.7 Exemple

Trouver D_1 le domaine de convergence de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} 2^n z^n$ et D_2 celui de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n z^n$. Où est définie la somme ?

Soit $z \in \mathbb{C}$

1. $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (2z)^n$ converge ssi $|2z| < 1$ donc $D_1 = \{z \in \mathbb{C} | \ |z| < \frac{1}{2}\}$.
2. Pour D_2, remarquons d'abord que si $z| \geqslant 1$ alors $nz^n \nrightarrow 0$ et donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} nz^n$ diverge grossièrement. Supposons donc $|z| < 1$. Alors $n^2 \times nz^n = n^3 z^n \underset{+\infty}{\rightarrow} 0$ (elle tend vers 0 en module) et donc $|nz^n| = o_{+\infty}(\frac{1}{n^2})$. Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum nz^n$ converge absolument donc converge. Ainsi $D_2 = \{z \in \mathbb{C} | \ |z| < 1\}$.

Si $|z| \geqslant 1$ alors la série somme diverge grossièrement. Comme la somme d'une série (numérique) convergente et d'une série divergente est une série divergente, la série entière somme converge sur D_1.

I.1.8 Définition
Soit $R \in \mathbb{R}^+$. On appelle disque ouvert de centre O et de rayon R l'ensemble $D_R = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| < R\}$.

I.1.9 Remarque

$D_0 = \emptyset$.

I.2 Convergence d'une série entière

I.2.1 Théorème (Lemme d'Abel)
Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Supposons qu'il existe $r > 0$ tel que $(|a_n|r^n)$ est une suite bornée. Alors pour tout $z \in D_r$ (ie $|z| < r$)

$$|a_n z^n| = O_{+\infty}\left(\left(\frac{|z|}{r}\right)^n\right) \text{ et donc } \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n \textbf{ converge.}$$

Preuve.
Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < r$. Alors $|a_n z^n| = |a_n r^n| \left(\frac{|z|}{r}\right)^n = O_{+\infty}(1)\left(\frac{|z|}{r}\right)^n = O_{+\infty}\left(\left(\frac{|z|}{r}\right)^n\right)$

Comme $0 \leqslant \frac{|z|}{r} < 1$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{|z|}{r}\right)^n$ converge et donc $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ converge absolument par comparaison de séries à termes positifs. ■

I.2.2 Définition-Proposition
Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière.

1. *L'ensemble $I = \{r \in \mathbb{R}^+ |\ (|a_n|r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée$\}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ qui commence à 0.*
2. *$R = \sup(I) \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ est appelé **rayon de convergence** de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$*

Preuve.
Il faut montrer que I est un intervalle de la forme $[0, a)$ (borne ouverte ou fermée, $a \in \overline{\mathbb{R}^+}$). Il suffit de montrer que si $r \in I$ alors $[0, r] \subset I$ ie que tous les nombres inférieurs à r sont encore dans I.

Soit $r \in I$ et $\rho \in [0, r]$. Alors, pour $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant |a_n|\rho^n = |a_n|r^n \underbrace{\frac{\rho^n}{r^n}}_{\leqslant 1} \leqslant |a_n|r^n$ et donc $(|a_n|\rho^n)$ est bornée, c'est à dire que $\rho \in I$. ■

I.2.3 Rayon de référence

Le rayon de convergence de la série géométrique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z^n$ vaut 1.

La série entière nulle possède un rayon de convergence infini.

I.2.4 Exemple
Calculons le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n+1} z^n$.

- Si $|z| > 1$ alors $\left(\frac{z^n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée (son module tend vers $+\infty$).
- Si $|z| < 1$, $\left(\frac{z^n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 donc est bornée.

Finalement, $R = 1$.

I.2.5 Théorème
Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

1. *Si $|z| < R$ alors la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ converge.*
2. *Si $|z| > R$ alors la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ diverge grossièrement.*
3. *Si $|z| = R$ on ne peut pas conclure.*

Preuve.
1. Il s'agit juste un redite du lemme d'Abel (si $|z| < R$ alors $|z| < r$ pour un $r \in I$).
2. Il suffit de remarquer qu'une suite non bornée ne peut tendre vers 0 (car toute suite convergente est bornée).
3. Reprenons la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n+1} z^n$. Pour $z = 1$, il s'agit de la série harmonique, notoirement divergente. Pour $z = -1$, on trouve une série convergente. ■

I.2.6 Domaines de convergence

1. Une série entière réelle (les a_n sont réels, on calcule $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour x réel) est convergente sur un intervalle de la forme $]-R, R[$ où R est le rayon de convergence. L'existence en $\pm R$ est éventuellement à étudier au cas par cas.
2. Pour une série complexe, la série converge sur D_R. Sur l'ensemble $C_R = \{z \in \mathbb{C} | \, |z| = R\}$, on ne peut rien dire.

I.2.7 Réciproque

Si on trouve un $z \in \mathbb{C}$ tel que la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ converge alors $R \geqslant |z|$.

Si on trouve un $z \in \mathbb{C}$ tel que la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ diverge alors $R \leqslant |z|$.

I.3 Calcul du rayon de convergence

I.3.1 Rayon 1

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

1. Si (a_n) n'est pas bornée (par exemple $a_n \underset{+infty}{\to} +\infty$) alors $R \leqslant 1$.
2. Si (a_n) est bornée (par exemple (a_n) converge), alors $R \geqslant 1$.

I.3.2 Proposition
Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série de convergence de rayon de convergence R_a et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R_b

1. *Si $a_n = O_{+\infty}(|b_n|)$ alors $R_a \geqslant R_b$ (un cas particulier : $a_n = o_{+\infty}(|b_n|)$).*
2. *Si $|a_n| \underset{+\infty}{\sim} |b_n|$ alors $R_a = R_b$.*

Preuve.

1. Soit $r < R_b$. On doit montrer que $(|a_n|r^n)$ est bornée (et donc que $r \leqslant R_a$). Or par hypothèse, on peut poser $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $|a_n| \leqslant M|b_n|$ pour tout $n \in \mathbb{R}$.
   Ainsi $|a_n|r^n \leqslant M|b_n|r^n$ et $(|b_n|r^n)$ est bornée donc $(|a_n|r^n)$ est bornée aussi. Ainsi $r \leqslant R_a$ et tout nombre plus petit que R_b est plus petit que R_a. On ne peut pas avoir $R_a < R_b$, c'est à dire qu'on a prouvé $R_a \geqslant R_b$.
2. C'est une conséquence directe car dans ce cas $a_n = O_{+\infty}(|b_n|)$ et $b_n = O_{+\infty}(|a_n|)$. ■

I.3.3 Exemple
Le rayon de convergence de $\sum \sin(\frac{1}{n}) z^n$ est 1 car $\sin(\frac{1}{n}) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

I.3.4 Conséquence

Comme pour les séries numériques, on peut commencer par calculer un équivalent simple de a_n et raisonner sur cet équivalent.

I.3.5 Exemple
Trouver le rayon de convergence de $\sum 2n(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n) z^n$.

On a $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln(1 + \frac{1}{n})\right) = \exp\left(1 - \frac{1}{2n} + o_{+\infty}(\frac{1}{n})\right) = e^1(1 - \frac{1}{2n} + o_{+\infty}(\frac{1}{n}))$. Ainsi $2n(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n) \underset{+\infty}{\sim} 1$ et le rayon cherché vaut 1.

I.3.6 Théorème
Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série de convergence de rayon de convergence R_a et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R_b.

1. *Pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$, la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda a_n z^n$ est de rayon de convergence R_a. Le cas $\lambda = 0$ donne un rayon infini.*
2. *Le rayon de convergence R de la série somme vérifie $R = \min(R_a, R_b)$ si $R_a \neq R_b$ et $R \geqslant R_a$ dans le cas $R_a = R_b$.*
3. *Le rayon de convergence R de la série produit vérifie $R \geqslant \min(R_a, R_b)$.*

Preuve.
Il s'agit d'une traduction directe des propriétés de convergences vu dans le chapitre sur les séries. Le méthode est la suivante : on prend $r < R$ (le rayon de convergence que l'on veut calculer) et on prouve la convergence par application du chapitre sur les séries numériques. La remarque I.2.7 conclut. ■

I.3.7 Inégalités strictes

On peut tout à fait avoir des inégalités strictes dans le théorème précédent. Il suffit de considérer des séries opposées pour la somme et le produit par la série nulle.

I.3.8 Proposition
Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.

Preuve.
Notons R_1 et R_2 ces deux rayons (respectifs). Comme $a_n = o_{+\infty}(n|a_n|)$, $R_1 \geqslant R_2$. On traite maintenant le cas $R_1 > 0$.

Soit $r < R_1$. Montrons que $(n|a_n|r^n)$ est bornée. Soit $r' \in]r, R_1[$. Alors, pour $n \in \mathbb{N}$, $n|a_n|r^n = \underbrace{|a_n|(r')^n}_{\text{bornée}} \times n\left(\frac{r}{r'}\right)^n$.

Or, par croissances comparées, $n\left(\frac{r}{r'}\right)^n \underset{+\infty}{\to} 0$ et est donc bornée. Par produit, $(n|a_n|r^n)$ est bornée. Ainsi $r \leqslant R_2$ et finalement $R_2 \geqslant R_1$. ∎

I.3.9 Exemple
Les séries suivantes sont de rayon de convergence 1 : $\sum n^2 z^n, \sum \frac{1}{n^2} z^n, \sum P(n) z^n$ où $P \in \mathbb{C}[X] \backslash \{0\}$.

I.4 d'Alembert

Commençons par un rappel :

I.4.1 Théorème (Règle de d'Alembert)
Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n > 0$. Supposons que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell$.

1. *Si $\ell < 1$ alors $\sum u_n$ converge (on a même $\forall a \in]\ell, 1[$ $u_n = o_{+\infty}(a^n)$).*
2. *Si $\ell > 1$ alors $\sum u_n$ diverge grossièrement ($u_n \underset{+\infty}{\to} +\infty$).*
3. *Si $l = 1$ la série peut être divergente ou convergente.*

I.4.2 Application au calcul de rayon de convergences

1. Calculer le rayon de convergence de $\sum \frac{z^n}{n!}$. Pour $z \neq 0$ on pose $u_n = \frac{|z|^n}{n!} > 0$. Alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{+\infty}{\to} 0$ et donc $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge (absolument).
   Ainsi $R \geqslant |z|$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ et $R = +\infty$.
2. On pose $a_n = \binom{2n}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer le rayon de convergence R de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$. Pour $z \neq 0$ on pose $u_n = \binom{2n}{n}|z^n| > 0$. Alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}\frac{(n!)^2}{(2n)!}|z| = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}|z| \underset{+\infty}{\to} 4|z|$.
   Ainsi si $|z| > \frac{1}{4}$, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ diverge donc $R \leqslant \frac{1}{4}$. De plus, si $|z| < \frac{1}{4}$, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ converge donc $R \geqslant \frac{1}{4}$. Finalement $R = \frac{1}{4}$.
3. Trouver le rayon de convergence de $\sum n^n z^n$.

II Propriétés de la somme, cas réel

Dans cette partie, on note $\sum a_n x^n$ les séries entières et on considère que x est réel (peu importe pour les a_n). Ainsi, si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ est de rayon $R > 0$ on considère la fonction (qui est la somme de la série) $f : \begin{cases}]-R, R[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{cases}$.

II.1 Intégration

II.1.1 Théorème

Soit $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors f est continue sur $]-R, R[$.

Preuve.
Cette preuve est hors programme...

Soit $a \in]-R, R[$. Montrons que $f(x) \underset{x\to a}{\to} f(a)$. Il s'agit d'un résultat d'inversion de limites.

Soit $N \in \mathbb{N}$. On note $S_N : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{N} a_n x^n$. Alors, pour $x \in]-R, R[$, $S_N(x) - S_N(a) = \sum n = 1^N a_n(x^n - a^n) = (x-a) \sum n = 1^N a_n \sum\limits_{k=0}^{n-1} x^k a^{n-1-k}$. Ainsi

$$|S_N(x) - S_N(a)| \leqslant |x-a| \sum n = 1^N |a_n| \sum_{k=0}^{n-1} |x|^k |a^k|$$

On se restreint maintenant à des valeurs de x dans $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ pour un ε bien choisi (de telle manière que cette intervalle soit inclus dans $]-R, R[$).

Soit $b \in]-R, R[$ tel que $|b| > \max(|a-\varepsilon|, |a+\varepsilon|)$.

Alors $|S_N(x) - S_N(a)| \leqslant |x-a| \sum\limits_{n=1}^{N} na_n|b|^n$. D'après I.3.8, la somme partielle du majorant converge vers $\alpha \in \mathbb{R}^+$ qui ne dépend pas de x (seulement de ε, qui lui ne dépend que de a). Par passage à la limite en faisant $N \to +\infty$, $|f(x) - f(a)| \leqslant |x-a|\alpha$ et donc par encadrement (cette fois $x \to a$), $f(x) \underset{x \to a}{\to} f(a)$. ■

Exercice 1
Soit f une fonction définie par une série entière $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ de rayon de convergence $R = +\infty$ avec $a_0 < 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\} a_n > 0$. Montrer que f s'annule au moins une fois.

II.1.2 Théorème

Soit $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *la somme d'une série entière de rayon de convergence* $R > 0$.

$$\forall x \in]-R, R[\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$$

Remarquons que les séries entières qui interviennent ici sont de rayon de convergence R *exactement d'après I.3.8*

Preuve.
Encore une fois hors programme.

Soit $x \in]-\mathbb{R}, \mathbb{R}[$ et t entre 0 et x. Soit également $N \in \mathbb{N}$

$\int_0^x \sum\limits_{n=0}^{N} a_n t^n \mathrm{d}t = \sum\limits_{n=0}^{N} \frac{a_n}{n+1} x^n$. Il s'agit encore une fois de pouvoir faire tendre N vers $+\infty$.

Or $\left|\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \int_0^x \sum\limits_{n=0}^{N} a_n t^n \mathrm{d}t\right| = \left|\int_0^x \left(f(t) - \sum\limits_{n=0}^{N} a_n t^n\right) \mathrm{d}t\right| = \left|\int_0^x \left(\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} a_n t^n\right) \mathrm{d}t\right|$.

On voit apparaître des restes de séries numériques absolument convergentes, appliquons l'inégalité triangulaire (sur l'intégrale et la série, on conserve la valeur absolue extérieure au cas où $x \leqslant 0$).

$$\left|\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \int_0^x \sum_{n=0}^{N} a_n t^n \mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\int_0^x \left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n||t|^n\right) \mathrm{d}t\right|$$

Or, pour t entre 0 et x, $|a_n||t|^n \leqslant |a_n||x|^n$. De plus, $\sum a_n x^n$ converge absolument donc on peut trouver N_0 tel que $\forall N \geqslant N_0 \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} |a_n||x|^n \leqslant \varepsilon$ pour un $\varepsilon > 0$ fixé.

Alors, pour ces N, $\left|\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \int_0^x \sum\limits_{n=0}^{N} a_n t^n \mathrm{d}t\right| \leqslant |\int_0^x \varepsilon \mathrm{d}t| = \varepsilon|x|$ qui peut être rendu arbitrairement proche de 0.

Ainsi, $\lim\limits_{N \to +\infty} \sum\limits_{n=0}^{N} \frac{a_n}{n+1} x^n = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. ■

II.1.3 Exemple
Pour $x \in]-1, 1[$, $-\ln(1-x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.

II.1.4 Exemple
Exprimer $\arctan(x)$ comme somme d'une série pour $x \in]-1, 1[$.

II.1.5 Corollaire
Sous les mêmes hypothèses que le théorème, on peut calculer, pour $a, b \in]-R, R[$ *l'intégrale* $\int\limits_a^b f(t)dt$ *en intégrant la somme terme à terme.*

II.2 Dérivation

II.2.1 Théorème
Soit f *la somme de la série entière* $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ *de rayon de convergence* $R > 0$.

f *est dérivable sur* $]-R, R[$ *et pour* $x \in]-R, R[$ *on a*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1} x^n$$

. Remarquons que la série entière qui définit f' est également de rayon de convergence R.

Preuve.
Hors programme.

Posons, au hasard, $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} n+1 a_{n+1}x^n$ qui est bien définie sur $]-R, R[$, continue et que l'on peut intégrer terme à terme d'après le théorème II.1.2. Alors pour $x \in]-R, R[$, $\int_0^x g(t)\mathrm{d}t = f(x) - a_0$ et donc f est une primitive de g.

Ainsi f est dérivable et $f' = g$. ■

II.2.2 Exemple
Calculons $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}}$.

Premièrement la série entière $\sum_{n\geqslant 1} x^n$ est de rayon de convergence 1. Notons $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$ sa somme. Sa dérivée aussi et est $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$. Ainsi $S = f'(\frac{1}{2}) = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 4$.

II.2.3 Théorème
Soit f la somme de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_nx^n$ de rayon de convergence $R > 0$. Alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et les dérivées de f sont obtenues par dérivation terme à terme de la série entière, ou encore

$$\forall k \in \mathbb{N} \forall x \in]-R, R[\ f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_nx^{n-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k}x^n$$

Preuve.
Simple récurrence. Hors programme aussi. ■

II.2.4 Exemple
Posons $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{\arctan(x)}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$.

Alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ par quotient dont le dénominateur ne s'annule pas.

De plus, pour $x \in]-1, 1[\setminus\{0\}$ on a $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$. Cette relation est encore vraie en 0. Ainsi $f \in \mathcal{C}^\infty(]-1, 1[, \mathbb{R})$ et finalement f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

II.2.5 Corollaire
Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_nx^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et f sa somme. Alors $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

II.2.6 Taylor

Nous ne sommes pas si étonnés de ce résultat. On retrouve les coefficients du développement de Taylor de f (qui est $\mathcal{C}^\infty$) en 0.

II.2.7 Corollaire
Les coefficients d'une série entière de rayon non nul sont uniques.

Plus précisément, si $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_nx^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_nx^n$ sont de rayons non nuls et ont les mêmes sommes pour tout x dans un intervalle de la forme $]-\alpha, \alpha[$ $(\alpha > 0)$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n = b_n$.

II.2.8 Exemple
Cherchons une fonction f somme d'une série entière qui vérifie $f' = f$. Notons $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_nx^n$ la série cherchée de rayon $R > 0$ (inconnu pour l'instant).

Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n$. Alors on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}a_n$. Par récurrence immédiate $\forall n \geqslant 1$ $a_n = \frac{1}{n!}a_0$ et $f = a_0 \exp$ qui est bien de rayon $R = +\infty > 0$.

III Développement en série entière

III.1 Fonctions développables

III.1.1 Définition
*Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I tel que $0 \in I$ et 0 n'est pas une borne de I. Le **développement de Taylor** de f est la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.*

III.1.2 Exemple
On a déjà vu que exp est la somme de son développement de Taylor sur $\mathbb{R}$: $\forall x_i n\mathbb{R}$ $\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

III.1.3 Définition
*Soit $f : I \to \mathbb{K}$ où I est intervalle qui contient 0 (et 0 n'est pas une borne de I). On dit que f est **développable en série entière** ssi il existe $r > 0$ et une série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_nx^n$ tels que :*

— $]-r,r[\subset I$
— $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_nx^n$ *est de rayon* $R \geqslant r$
— $\forall x \in]-r,r[\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n$.

Autrement dit, f *est la somme d'une série entière sur une intervalle* $]-r,r[\neq\emptyset$ *contenu dans* I.

La série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_nx^n$ *est appelée* ***développement en série entière*** *de* f.

III.1.4 Résumé

Soit f une fonction développable en série entière sur $]-r,r[$ avec $r>0$.

1. f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r,r[$.
2. Le développement en série entière est unique sur $]-r,r[$ et il s'agit du développement de Taylor de f.
3. Toute primitive de f est développable en série entière sur $]-r,r[$.
4. Les dérivée successives de f sont développable en série entière sur $]-r,r[$.

III.1.5 Remarque

Il y a des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sans être développable en série entière. Par exemple $f : x\mapsto \exp(-\frac{1}{x^2})$ prolongée en 0 par $f(0)=0$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (par récurrence, et application précise du théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$). Par contre sa série de Taylor est nulle et donc f ne coïncide avec cette série sur aucun intervalle infini centré en 0.

III.1.6 Parité

Si f est DSE et paire, alors les a_{2n+1} sont nuls. Si f est impaire, les a_{2n} sont nuls.

III.2 Développements en pratique

Dans les preuves des résultats qui suivent se trouvent les méthodes principales pour prouver qu'une fonctions est développable et calculer son développement.

III.2.1 Exemple
Donner le DSE (si possible) de $f : x\mapsto \frac{\ln(1-x)}{1-x}$ qui est définie sur $]-\infty,-1[$. Soit $x\in]-1,1[$ (dans l'intervalle de convergence des deux séries entières que l'on voit apparaître ici).

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-1}{n}x^n\sum_{n=0}^{+\infty}x^n = -\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n$$

A priori ce produit de Cauchy a un rayon de convergence $R\geqslant 1$ (cf théorème I.3.6) Or $\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k} = (H_n)_{n\geqslant 1}$ diverge donc la suite (H_n1^n) n'est pas bornée. Ainsi $R\leqslant 1$. Finalement $R=1$ et f est développable sur $]-1,1[$.

Remarque : on ne pouvait pas espérer beaucoup plus pour un DES, vu que f est définie sur $]-\infty,1[$. Ceci n'empêchait pas a priori la série entière d'avoir un rayon plus grand que 1...

III.2.2 Proposition
$\sin$ *et* $\cos$ *sont développable en série entière sur* $\mathbb{R}$ *et pour tout* $x\in\mathbb{R}$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} \quad et \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

Preuve.
Prouvons le pour cos.

Premièrement, le rayon de convergence de la série considéré est $+\infty$. Soit $x\in\mathbb{R}$ et $N\in\mathbb{N}$. Alors $|\cos^{(N+1)}|\leqslant 1$ sur tout intervalle et d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée entre 0 et x :

$$\left|\cos(x) - \sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}\right| \leqslant \frac{|x^{2N+1}\times 1}{(2N+1)!}$$

Par croissances comparées $\frac{|x^{2N+1}}{(2N+1)!}\underset{N\to+\infty}{\to} 0$ et cos coïncide bien avec son développement de Taylor sur $\mathbb{R}$. ∎

III.2.3 Proposition
sh *et* ch *sont développable en série entière sur* $\mathbb{R}$ *et pour tout* $x\in\mathbb{R}$

$$\mathrm{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!}x^{2n} \quad et \quad \mathrm{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

Preuve.
Similaire. A faire en exo. ∎

III.2.4 Proposition
Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. $f_\alpha : x\mapsto (1+x)^\alpha$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ et

$$(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

Si $\alpha\in\mathbb{N}$, le rayon de convergence est $+\infty$ et le développement est en fait une somme finie.

Preuve.
Considérons le problème de Cauchy $\begin{cases} y(0)=1 \\ (1+x)y'(x)-\alpha y(x)=0\end{cases}$. Clairement f_α est solution sur $]-1,+\infty[$. On considère que $\alpha\notin\mathbb{N}$.

— Analyse Cherchons maintenant une solution g somme d'une série entière de rayon $R>0$, $g=\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}a_nx^n$.

Alors

$$\begin{aligned}(1+x)g'(x)-\alpha g(x)=0 &\iff (1+x)\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}-\alpha\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=0\\ &\iff \sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}+\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^n-\alpha\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=0\\ &\iff \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n+\sum_{n=1}^{+\infty}(n-\alpha)a_nx^n=0\\ &\iff \sum_{n=0}^{+\infty}((n+1)a_{n+1}+(n-\alpha)a_n)x^n=0\end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'une série entière (valable si $R>0$), on obtient la relation : $\forall n\in\mathbb{N}\ a_{n+1}=\frac{\alpha-n}{(n+1)}a_n$. De plus, on doit avoir $g(0)=1$ c'est à dire $a_0=1$. Par récurrence immédiate, $a_n=\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)}{n!}$.

— Synthèse Considérons la série entière $\sum\limits_{a_nx^n}$ où $a_n=\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)}{n!}\neq 0$. Calculons le rayon de convergence R de cette série. Pour $x\neq 0$ on a

$$\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_nx^n|}=\frac{|\alpha-n|}{n+1}|x|\underset{n\to+\infty}{\to}1\times|x|$$

Ainsi si $|x|>1$ la série entière diverge et donc $R\leqslant 1$. De plus, si $|x|<1$ la série converge et donc $R\geqslant 1$.

Finalement, $R=1>0$ et le calcul fait dans l'analyse montre que la fonction somme est solution du problème de Cauchy considéré sur $]-1,1[$.

Par unicité de la solution à un problème de Cauchy (sur un intervalle), f_α est développable en série entière sur $]-1,1[$. ∎

III.2.5 Exemple
Soit $p\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$. Donnons le DSE de $x\mapsto\frac{1}{(1-x)^p}$ qui est de rayon 1 d'après le théorème précédent.

Nous devons calculer, pour $n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$, $\prod\limits_{k=0}^{n-1}(-p-n)=(-1)^n\prod\limits_{k=0}^{n-1}(p+n)=(-1)^n\frac{(n+p-1)}{(p-1)!}$.
Ainsi, pour $x\in]-1,1[$

$$\frac{1}{(1-x)^p}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(n+p-1)!}{(p-1)!}\frac{1}{n!}(-1)^nx^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+p-1}{p-1}x^n$$

III.2.6 Exemple
Montrons que arcsin est DSE et donnons son développement.

$x\mapsto\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est DSE sur l'ensemble $\{x\in\mathbb{R}|\ x^2\in]-1,1[\}=]-1,1[$. et on a pour $x\in]-1,1[$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\prod_{k=0}^{n-1}(-\frac{1}{2}-k)\frac{1}{n!}(-1)^nx^{2n}$$

(rappel : un produit vide vaut 1 par convention).

Or pour $n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$, $\prod\limits_{k=0}^{n-1}(-\frac{1}{2}-k)=\prod\limits_{k=0}^{n-1}\frac{-2k-1}{2}=\frac{(-1)^n}{2^n}\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2k+1)=\frac{(-1)^n}{2^n}\frac{(2n)!}{2^nn!}$ par l'opération classique consistant à multiplier et diviser par le produit des nombres pairs entre 2 et $2n$.

Finalement, $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}x^{2n}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}x^{2n}$. Par intégration terme à terme :

$$\arcsin(x)=\underbrace{0}_{\arcsin(0)}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{(2n+1)4^n}x^{2n+1}$$

et le rayon de convergence est 1.

III.2.7 Formulaire

A savoir	
$\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$	$x \in]-1,1[$
$\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$	$x \in]-1,1[$
$(1-x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$	$x \in]-1,1[$
$e^x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$	$x \in \mathbb{R}$
$\sin(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$x \in \mathbb{R}$
$\mathrm{ch}(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$x \in \mathbb{R}$
$\mathrm{sh}(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$x \in \mathbb{R}$
A savoir refaire	
$\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$	$x \in]-1,1[$
$\arcsin(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{(2n+1)4^n} x^{2n+1}$	$x \in]-1,1[$
$\arctan(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$	x ∈]-1, 1[