Séries numériques

— Séries absolument convergentes.

— Produit de Cauchy.

Diagonalisation

1. Définition de vecteur propre et valeur propre (pour un endomorphisme ou une matrice).
2. Espaces propres d'un endomorphisme, d'une matrice.
3. Polynômes caractéristiques. Savoir retrouver la trace et le déterminant dans les coefficients.
4. Inégalité entre la dimension d'un espace propre et la multiplicité de la racine du polynôme caractéristique.
5. Les espaces propres de f sont stables par f. Si f et g commutent, les espaces propres de l'un sont stables par l'autre.
6. Endomorphismes et matrices diagonalisables.
7. CNS de diagonalisabilité : il existe une base de vecteurs propres, la somme directe des espaces propres est E, χ est scindé et dimension des espace propres = multiplicités des racines.
8. Condition suffisante : χ est scindé à racines simples.
9. Application au calcul de puissances, aux suites récurrentes linéaires d'ordre $\geqslant 3$.
10. Trigonalisation (il faut des indications pour la pratique) : si χ est scindé, l'endomorphisme est trigonalisable.
11. Trace et déterminant en fonctions des valeurs propres (éventuellement complexes).

Questions de cours

1. On note $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$. Montrer que $\forall a, b \in \mathbb{C}\ f(a)f(b) = f(a+b)$.
2. Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. λ est une valeur propre de A ssi $\chi_A(\lambda) = 0$.
3. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$. Alors $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par g.