Devoir maison n°5

A rendre le 21/12. Vous pouvez rendre une copie pour 2, à condition que chacun rédige.

Soient n, p, q, r, s des entiers naturels non nuls.

Questions préliminaires

1. Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ de terme général a_{ij} et $B \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{C})$ de terme général b_{ij}.
   (a) A quelle condition sur p, q, r, s le produit AB est-il bien défini ? Quelle est alors la taille de la matrice AB ?
   (b) Sous cette condition, on note c_{ij} le terme général de la matrice AB. Exprimer c_{ij} en fonction des a_{ij} et b_{ij}.
2. Soit $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $a_{ij}^{(p)}$ le terme général de la matrice A_p.
   On dit qu'une suite de matrice $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ si pour tous indices i, j, la suite complexe $(a_{i,j}^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers a_{ij}.
   (a) Montrer que si la suite de matrices $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers A et si la suite de matrices $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers B alors la suite $(A_p + B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $A + B$.
   (b) Montrer que, sous les mêmes conditions, la suite $(A_pB_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers AB.

Partie I

On considère la matrice carré A d'ordre 3 définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \\ 1/8 & 7/8 & 0 \end{pmatrix}$$

1. On pose $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que X_1 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1.
2. Déterminer les valeurs propres de la matrice A. Est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? dans $\mathbb{C}$?
3. On note
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{6}}{8}i & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{6}}{8}i \end{pmatrix}$$
   Calculer D^n puis $\lim\limits_{n\to+\infty} D^n$.
4. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n$. On demande ici une expression explicite de la limite.
5. Déterminer l'unique vecteur ligne $\pi = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ tel que
   — $a > 0, b > 0, c > 0$,
   — $a + b + c = 1$,
   — $\pi A = \pi$.

Partie II

On considère la matrice carrée B d'ordre 2 suivante

$$B = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{pmatrix}$$

avec $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$.

1. On considère le polynôme $P = (X-1)(X-(a+b-1))$.
   Calculer $P(B) = (B - I_2)(B - (a+b-1)I_2)$.
2. Soit p un entier strictement positif.
   (a) Justifier l'existence d'un polynôme Q et de deux réels α_p et β_p tels que
   $$X^p = P(X)Q(X) + \alpha_p X + \beta_p$$
   Question bonus : on peut justifier mieux que l'existence.
   (b) En évaluant l'expression précédente en des valeurs de X bien choisies, déterminer les valeurs de α_p et β_p.
   (c) En déduire une expression de B^p.
3. Montrer que la suite $(B^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite que l'on précisera.

Partie III, facultative

Soit $M = (m_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels.
On dit que la matrice M est **stochastique** si

— pour tout couple d'entier naturels (i, j) tel que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$:

$$m_{ij} \geqslant 0$$

— la somme des termes de chaque ligne est égale à 1, c'est à dire, pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$:

$$\sum_{j=1}^{n} m_{ij} = 1$$

1. Soit $M = M = (m_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice stochastique.
   Montrer que, pour tout couple d'entier naturels (i, j) tel que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$:

$$m_{ij} \leqslant 1$$

2. Soit $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que si M est stochastique, alors X_1 est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.
   (b) Réciproquement, soit M une matrice carrée d'ordre n à coefficients positifs. Montrer que si X_1 est vecteur propre associé à la valeur propre 1, alors M est stochastique.
   (c) En déduire que le produit de deux matrices stochastiques est stochastique.

3. Soit M une matrice stochastique, et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| = 1$.
   (a) On pose $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = MX$.
   Montrer que, pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$:

$$|y_i| \leqslant 1$$

   (b) En déduire que si X est un vecteur propre associé à la valeur propre λ, alors :

$$|\lambda| \leqslant 1$$

   (c) Montrer que toutes les valeurs propres de M sont de module inférieur à 1.

Le sujet se terminait ici. On pourrait ajouter tout de même : dans le cas où M est diagonalisable, que dire de la convergence de $(M^p)_{p \in \mathbb{N}}$?