Table des matières

I Probabilités

I.1 Evénements

Définition 1
Soient A, B deux événements de l'univers Ω.

1. L'événement contraire de A est $\overline{A} = A^c = \Omega \backslash A$
2. L'événement A et B est $A \cap B$.
3. L'événement A ou B est $A \cup B$.
4. On dit que A et B sont **incompatibles** ssi $A \cap B = \emptyset$.

Définition 2
Soit Ω un univers. On dit que $A_1, \dots, A_n$ est un système complet d'événements ssi $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ et cette réunion est disjointe ie les A_i sont incompatibles 2 à 2

I.2 Propriété des probabilité

Définition 3
Soit Ω un univers. On appelle probabilité sur Ω une fonction P définie sur les événements $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ qui vérifie :

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
2. pour tout $A, B \subset \Omega$ $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Théorème 1
On note $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$.

Soient $p_1, \dots, p_n \in [0,1]$ tels que $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$. Alors il existe une unique probabilité P telle que $p_i = P(\{\omega_i\})$.

Proposition 1
On suppose que $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme. Soit A un événement. $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Proposition 2
Soient A, B deux événements.

1. $\mathbb{P}(A \backslash B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$
2. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
3. $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$ donc $\mathbb{P}(A \cup B) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B})$.
4. Si $A \subset B$ alors $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$ (croissance)

I.3 Propriétés des probabilités conditionnelles

Théorème 2 (Formule des probabilités composées)

1. Si $\mathbb{P}(B) > 0$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)$.
2. On considère $A_1, \dots, A_n$ des événements tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$.
   Alors $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \dots \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$

Théorème 3 (Formule des probabilités totales)
Soit $(A_1, \dots, A_n)$ un système complet dévénement de probabilités toutes non nulle. Soit B un événement. Alors $\mathbb{P}(B) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)$.

En particulier, si $\mathbb{P}(A) \in]0,1[$, alors $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|\overline{A})\mathbb{P}(\overline{A})$.

Théorème 4 (Formule de Bayes)
Soit B un événement tel que $\mathbb{P}(B) > 0$.

1. Soit A un événement tel que $\mathbb{P}(A) > 0$. $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$.
2. Soit $(A_1, \dots, A_n)$ un système complet dévénements de probabilités toutes non nulle.

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_j)}$$

I.4 Evénements indépendants

Définition 4
Soient A, B deux événements. A et B sont indépendants ssi $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

II Variables aléatoires

II.1 Lois

Définition 5

Soit X une variable aléatoire sur Ω. L'application $\mathbb{P}_X : \left\{ \begin{array}{ccc} X(\Omega) & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & \mathbb{P}(X=x) \end{array} \right.$ est appelée loi de la variable X. Elle est définie par la donnée des probabilités de toute valeur de X.

Définition 6

Soit E un ensemble fini et $X : \Omega \to E$ une VA. On dit que X suit la loi uniforme sur E (on note $\mathcal{U}(E)$ cette loi) ssi $\mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{|E|}$ pour tout $x \in E$.

Interprétation : modélise un choix "au hasard" dans un ensemble à n éléments.

Définition 7

Soit $p \in [0,1]$ un nombre fixé. Soit $X : \Omega \to \{0,1\}$ une variable aléatoire. On dit que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p (notée $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$) ssi $\mathbb{P}(X=1) = p, \mathbb{P}(X=0) = 1-p$.

Interprétation : modélise le succès (de probabilité p) ou l'échec d'une expérience.

Définition 8

Soit $p \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$ non nul. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0,n]\!]$. On dit que X suit la loi binomiale de paramètre n et p (noté $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$) ssi

$$\forall k \in [\![0,n]\!] \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Interprétation : modélise le nombre de succès dans la répétition de n expériences indépendantes, chacune ayant une probabilité p de réussite. X est donc la somme de n variables de Bernoulli indépendantes de paramètre p.

II.2 Variables indépendantes

Définition 9

Soient X, Y deux variables aléatoires sur Ω. on dit qu'elles sont indépendantes ssi $\forall x, y \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$ ie ssi les événements $(X = x)$ et $(Y = y)$ sont deux à deux indépendants pour toutes les valeurs possibles de x et y.

II.2.1 Extension

On étend à plus de deux variables en vérifiant l'indépendance non pas deux à deux mais pour toute sous-famille finie : on doit pouvoir calculer toutes les probabilités d'intersection possible par produit.

II.3 Espérance

Définition 10

Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle espérance de X et on note $E(X)$ le nombre $\sum_{x \in X(\Omega)} x \times \mathbb{P}(X = x)$. Elle ne dépend que de la loi de X. On dit que X est centrée ssi $E(X) = 0$.

Proposition 3 (Propriétés de l'espérance)

Soient X, Y deux variables aléatoires réelles sur Ω.

1. Linéarité. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. $E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y)$.
2. Positivité : si $X \geqslant 0$ alors $E(X) \geqslant 0$.
3. Croissance. Si $\forall \omega \in \Omega\ X(\omega) \leqslant Y(\omega)$ (que l'on note $X \leqslant Y$) alors $E(X) \leqslant E(Y)$.

Théorème 5 (Théorème de transfert)

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire et f une fonction définie sur $X(\Omega)$.

Alors $E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\mathbb{P}(X = x)$. Ainsi l'espérance de $f(X)$ est déterminée par la loi de X. Cas commun : $E(X^2) = \sum x^2 \mathbb{P}(X = x)$

II.4 Ecart type

Définition 11

Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle variance de X la quantité $V(X) = E((X - E(X))^2) \in \mathbb{R}^+$.

L'écart type de X est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

On dit que X est réduite ssi $V(X) = \sigma(X) = 1$

Proposition 4

Soit X une variable aléatoire réelle. Alors $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

Proposition 5

Soit X une variable aléatoire réelle et $a, b \in \mathbb{R}$. $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

Proposition 6

Si X et Y sont des variables réelles indépendantes, $E(XY) = E(X)E(Y)$ et $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

II.4.1 Résumé sur les lois usuelles

Nom	Notation	Valeurs	Loi	Espérance	Variance
Bernoulli	$\mathcal{B}(p)$	$\{0,1\}$	$\mathbb{P}(X=1) = p, \mathbb{P}(X=0) = 1-p$	p	$p(1-p)$
Binomiale	$\mathcal{B}(n,p)$	$[\![0,n]\!]$	$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$