Exercice 1
Soit $M \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. On choisi au hasard et successivement $n \leqslant M$ nombres entre 1 et M. Quelle est la probabilité qu'aucun nombre ne soit choisi plus d'une fois ?

Application numérique (en python) : $M = 365$, $n = 45$.

Exercice 2
Dans une population de N individus, $n < N$ soutiennent le candidat C. On interroge au hasard $p \in [\![1, N]\!]$ individus distincts et on note X le nombre de soutient de C ainsi trouvés.

Donner la loi de X, en commençant par expliciter ses valeurs possibles (on utilisera la notion de maximum et/ou minimum).

Exercice 3
Dans une famille de deux enfants, quelle est la probabilité que le cadet soit un garçon sachant que l'aîné est une fille ? Sachant que l'un deux deux est une garçon, quelle est la probabilité que l'autre soit une fille ?

On commencera, une fois n'est pas coutume, par préciser l'univers Ω.

Exercice 4
On sait que lorsqu'une famille de deux enfants est composée d'une fille et d'un garçon, lors de l'absence des parents, la fille répond au téléphone avec une probabilité p.

M. et Mme. T [1] sont sortis faire une course en laissant leurs deux enfants chez eux. Le téléphone sonne. Une fille répond. Quelle est la probabilité pour que l'autre enfant soit un garçon ?

Exercice 5
Soit X une variable aléatoire, $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. Donner la loi de $Y = n - X$.

Exercice 6
Deux avions A et B ont respectivement 2 et 4 moteurs. Chacun de ces moteurs est indépendant des autres, et tombe en panne au cours d'un vol avec un probabilité p. Un avion parvient à destination ssi la moitié ou moins de ses moteurs tombe en panne.

Sachant que vous n'avez aucune envie de nager, discuter suivant la valeur de p quel est l'avion de votre choix.

Exercice 7
Un étudiant passe le concours de l'ENAC qui est un QCM composé de $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ questions, chacune comportant 4 réponses dont une seule est juste [2]. Pour chaque question il a une probabilité $p \in]0, 1[$ de connaître la bonne réponse. Pour les autres il choisi au hasard l'une des quatre réponses.

On note X le nombre le questions pour lesquelles il connaissait la réponse et Y le nombre de réponse au hasard juste.

1. Donner la loi de X et la loi conditionnelle de Y sachant $(X = k)$.
2. Donner la loi de $Z = X + Y$ qui est le nombre total de bonne réponses.
3. Calculer l'espérance de Z (qui ressemble à la note moyenne que notre étudiant obtiendra).

Exercice 8
Un archer tire sur n cibles. A chaque tir il a une probabilité p de toucher la cible.

Il tire une première fois sur chaque cible et on note X le nombre de cible touchées. Il tire ensuite une seconde fois sur chaque cible non atteinte et on note Y le nombre de coup au but lors de cette deuxième tentative.

Donner la loi de $Z = X + Y$.

Exercice 9
1. Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $0, 1, \ldots, N$. Montrer que $E(X) = \sum_{n=0}^{N-1} \mathbb{P}(X > n)$.
2. Dans une urne contenant N boules numérotés de 1 à N, on tire avec remise n boules successivement. On note X le maximum des numéros tirés. Calculer l'espérance de X puis la loi de X.

Exercice 10
On dispose de n boites numérotées de 1 à n. La boite n°k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard de façon équiprobable une boite, puis une boule dans cette boite. On note X le numéro de la boite et Y le numéro de la boule.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).
2. En déduire la loi de Y
3. Calculer l'espérance de Y.

1. les noms ont été changés
2. ce qui est faux en pratique, mais simplifions le problème.