Calcul de rayon

Exercice 1
Calculer le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ lorsque :

a) $a_n = \dfrac{(\ln n)^2}{\sqrt{n}}$ b) $a_n = \dfrac{\operatorname{sh} n}{\operatorname{ch}^2 n}$ c) $a_{2n} = 2^n$ et $a_{2n+1} = 0$ d) $a_n = \left(\dfrac{1}{1+\sqrt{n}}\right)^n$
e) $a_n = \dfrac{n^n}{n!}$ f) a_n est la somme des diviseurs premiers de n.

Exercice 2
Déterminer le rayon et le domaine de convergence de chacune des séries entières suivantes :

a) $\sum\limits_{n\geqslant 0} n! z^n$ b) $\sum\limits_{n\geqslant 0} n! z^{n^2}$ c) $\sum\limits_{n\geqslant 0} z^{n!}$

Calcul de somme

Exercice 3

1. Déterminer le rayon de convergence R et calculer pour tout $x \in \left]-R,\, R\right[$, la somme
$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n^2+n+1)x^n.$$
Indication : Pour les séries entières dont le coefficient a_n est de la forme $P(n)$ ou $P(n)/n!$, où P est un polynôme, on pourra décomposer P dans la base $(L_k)_{k\geq 0}$ définie par $L_0(X) = 1$, et pour $k \geq 1$, $L_k(X) = X(X-1)\cdots(X-(k-1))$. On fera ensuite apparaître les dérivées de la série géométrique dans le premier cas et la série de l'exponentielle dans le second.
2. Mêmes questions lorsque $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+n+1}{n!} x^n$.

Exercice 4
Prouver la convergence et calculer la somme de $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{n^2}{2^n}$, $\sum\limits_{n\geqslant 0} (n+1)p(1-p)^n$ où $p \in]0,1[$.

Exercice 5
Soit $a \geq 0$. Rayon et somme de $\sum\limits_{n\geqslant 0} \operatorname{ch}(na)x^n$, $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{\cos(na)x^n}{n!}$

Exercice 6
Calculer le rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes ($x \in \mathbb{R}$) :

a) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{x^{3n}}{n+1}$ *b)* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{x^n}{(2n)!}$ *c)* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{x^{4n}}{4n+1}$ *d)* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{n! \times (2n+1) \times (2n-1) \times \cdots \times 3 \times 1}$.

Indication : on pourra utiliser la décomposition $\frac{1}{1-x^4} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2}\right]$.

Développements

Exercice 7
Montrer que $x \mapsto \frac{\arctan(x)}{x}$ se prolonge sur $\mathbb{R}$ en une fonction $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 8
Donner le développement en série entière (DSE) au voisinage de 0 ($x \in \mathbb{R}$) des fonctions suivantes en précisant le rayon de convergence de la série entière obtenue :

1. $f_1 : x \mapsto \frac{1}{2+x}$
2. $f_2 : x \mapsto \ln(4-x^2)$.
3. $f_3 : x \mapsto \ln(x^2+5x+4)$.
4. $f_4 : x \mapsto e^x \sin(x)$
5. $f_5 : x \mapsto \operatorname{sh}(x)\cos(x)$.
6. $f_6 : x \mapsto \displaystyle\int_x^1 \frac{\cos(t)-1}{t}\mathrm{d}t$.

Exercice 9
On veut développer en série entière la fonction $x \mapsto f(x) = \ln\sqrt{x^2 - 2x\cos\alpha + 1}$ où $\alpha \in \left]0,\, \pi\right[$.

1. Justifier et établir que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = \frac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-e^{i\alpha}} + \dfrac{1}{x-e^{-i\alpha}}\right)$.
2. Développer f' en série entière et préciser le rayon de convergence.
3. En déduire le développement de f en série entière.

Exercice 10

1. Montrer que la série entière
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}\, x^{2n+1}$$
a pour rayon de convergence $\sqrt{2}$.
Pour tout $x \in \left]-\sqrt{2},\, \sqrt{2}\right[$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}\, x^{2n+1}$.
2. Montrer que f est solution de l'équation différentielle
$(E) \quad (x^2-2)y' + xy + 2 = 0$.
3. Déduire de ce qui précède une expression explicite de f.