

Devoir maison 2

A rendre le 11/10 au plus tard. Les résultats seront soulignés ou encadrés.

Exercice 1

Soit f la fonction $\begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos^3(x) + \sin^3(x) \end{cases}$.

0. Rappeler la formule de dérivation composée $(u^\alpha)'$.
1. Donner la périodicité de f . Est-elle paire ? impaire ? Préciser le domaine sur lequel vous allez étudier cette fonction.
2. Montrer rapidement que f est dérivable puis donner sa dérivée.
3. Trouver les variations de f sur l'intervalle choisi à la question 1.
4. Tracer l'allure de f en précisant la tangente en $x = 0$.
5. Résoudre l'équation $f(x) = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
6. Montrer que l'image de f est $[-1, 1]$ et trouver un intervalle sur lequel f est injective et prend toutes ses valeurs. On note I cet intervalle. Ainsi f est une bijection de I dans $[-1, 1]$.
7. Est-ce que f^{-1} est dérivable sur $[-1, 1]$? Si non, donner l'ensemble de dérivabilité de f^{-1} .
8. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4})(1 - \frac{\sin(2x)}{2})$.
Rappeler d'abord la formule de factorisation $a^3 - b^3$ valable pour des complexes a, b .