Devoir maison n°6

A rendre le 16/01. Vous pouvez rendre une copie pour 2, à condition que chacun rédige.

Exercice 1
On considère la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n^2}$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de cette série.
2. Donner l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ (il faut comprendre qu'on s'intéresse à la convergence en R et $-R$ de la série).
3. Donner une expression simple de $f'(x)$ pour $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$.
4. Calculer $f(-1)$ sachant que $f(1) = \frac{\pi^2}{6}$.
5. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g définie par la relation $g(x) = f(x) + f\left(-\frac{x}{1-x}\right)$.
6. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle à préciser et déterminer la fonction g'.
7. En déduire la valeur de $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

Exercice 2
Dans $\mathbb{R}^2$ (le plan rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$), on considère $\Omega = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

1. Soit N un point du cercle de centre Ω et de rayon 1. Déterminer, quand il existe, l'orthocentre du triangle $(O\Omega N)$. Rappel : il s'agit du point d'intersection des hauteurs.
   On pourra d'abord paramétrer le cercle en question (pour exprimer les coordonnées de N), puis déterminer l'intersection de deux droites.
2. On note Γ le lieu de ces orthocentres. Nous avons obtenu une première paramétrisation de Γ à la question précédente.
   (a) Pour $t \in]-\pi,\pi[$, on pose $u = \tan\frac{t}{2}$. Montrer que $\cos(t) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ et $\sin(t) = \frac{2u}{1+u^2}$.
   (b) Montrer que l'on peut paramétrer Γ par $x(u) = \frac{2}{u^2+1}$ et $y(u) = \frac{u^2-1}{u(u^2+1)}$.
3. Etudier la courbe Γ sous la forme précédente, puis tracer.
   On admet que l'on peut déterminer la pente de la tangente en un point en calculant la limite de $\frac{y'}{x'}$ (donner une interprétation intuitive de ce résultat). N'utiliser ceci que si le cours est impuissant.