Table des matières

I Opérations vectorielles

On se place dans $\mathbb{R}^n$ avec $n = 2$ ou 3.

I.1 Produit scalaire

I.1.1 Propriétés

Soient $X, Y \in \mathbb{R}^n$ (n = 2 ou 3, mais plus s'il le faut, la définition ne change pas).

Le produit scalaire de X et Y est $(X|Y) = {}^tXY = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. avec des notations évidentes pour les coordonnées dans la base canonique.

1. symétrie : $(X|Y) = (Y|X)$. C'est évident sur la formule a l'aide d'une somme. On peut également remarquer que ${}^tXY$ est un nombre et donc ${}^t({}^tXY) = {}^tYX$ est le même nombre.
2. Bilinéarité : Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, X_1, X_2, Y \in \mathbb{R}^n$

$$(\lambda X_1 + \mu X_2|Y) = \lambda(X_1|Y) + \mu(X_2|Y)$$

$$(Y|\lambda X_1 + \mu X_2) = \lambda(Y|X_1) + \mu(Y|X_2)$$

3. positivité : $(X|X) \geqslant 0$.
4. le produit scalaire est défini : $(X|X) = 0 \iff X = 0$.
5. On a $\|X\|^2 = (X|X)$.

Exercice 1
Soient $X, Y \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $\|X+Y\|^2 = \|X\|^2 + 2(X|Y) + \|Y\|^2$ et $\|X\|^2 - \|Y\|^2 = (X-Y|X+Y)$.

Exercice 2
Exprimer $(X|Y)$ en fonction de normes.

I.1.2 Orthogonalité

Deux vecteurs sont orthogonaux ssi leur produit scalaire est nul.

I.1.3 Distance

La distance entre deux éléments de $\mathbb{R}^n$ est la norme de leur différence.

Exercice 3
A quelle condition un parallélogramme est-il un losange ? un rectangle ? Le prouver !

I.2 Déterminant

I.2.1 Propriétés

1. n vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^n$ ssi leur déterminant dans la base canonique est non nul.
2. le déterminant est linéaire par rapport à chaque colonne
3. une base est directe ssi son déterminant dans la base canonique est strictement positif

I.2.2 Interprétation géométrique

1. On note $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soient $u, v \in \mathbb{R}^2$. $\det_{\mathcal{B}_c}(u, v)$ est l'aire orientée du parallélogramme construit sur u, v.
2. Dans $\mathbb{R}^3$, le déterminant est le volume orienté du parallélépipède construit sur les trois vecteurs.

Exercice 4

Soient A, B, C 3 points non alignés de $\mathbb{R}^2$. Exprimer à l'aide d'un déterminant l'aire du triangle ABC.

Rappelons que le volume d'un tétraèdre est $V = \frac{1}{3} B \times h$ où B est l'aire d'une base et h la hauteur correspondante. Exprimer à l'aide d'un déterminant le volume du tétraèdre $ABCD$.

I.3 Produit vectoriel

On se place obligatoirement dans $\mathbb{R}^3$ cette fois.

I.3.1 Propriétés

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}.$$

1. Si $u, v \in \mathbb{R}^3$, $u \wedge v$ est orthogonal à u et v.
2. $u \wedge v = 0_{\mathbb{R}^3} \iff u$ et v sont colinéaires.
3. Si u, v sont nos colinéaires, $(u, v, u \wedge v)$ est une base directe de l'espace.
4. Le produit vectoriel est bilinéaire.
5. le produit vectoriel est anti-symétrique, ie $u \wedge v = -v \wedge u$.

I.3.2 Construction de base orthonormée directe

Si on a $u, v \in \mathbb{R}^3$ tels que $u \neq 0, v \neq 0$ et $u \perp v$, alors on peut poser $u' = \frac{1}{\|u\|}.u$ et $v' = \frac{1}{\|v\|}.v$. Alors, si $w' = u' \wedge v'$, la base (u', v', w') est orthonormée directe.

Exercice 5
Construire une base orthonormée directe dont les deux premiers vecteurs forment une base du plan $P : x - z = 0$.

II Lieux géométriques

II.1 Droites

II.1.1 Généralités

Les droites (affines) de $\mathbb{R}^n$ sont les ensembles de la forme $\mathcal{D} = A + \text{Vect}(u)$ où A est un point et u un vecteur directeur non nul. $D = \text{Vect}(u)$ est la direction de $\mathcal{D}$.

Cela revient à donner une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$. Par exemple dans le plan, $M : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{D}$ ssi $\exists t \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} x = x_A + tx_u \\ y = y_A + ty_u \end{cases}$ avec des notations évidentes pour les coordonnées de A et u. Dans l'espace, on ajoute juste une troisième coordonnée.

II.1.2 Colinéarité

Avec les notations précédente, un point $M \in \mathbb{R}^n$ est un point de $\mathcal{D}$ ssi $\overrightarrow{AM}$ et u sont colinéaires (penser au déterminant dans $\mathbb{R}^2$).

II.1.3 Cas de $\mathbb{R}^2$

Toute droite $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ possède une équation de la forme $\mathcal{D} : ax + by + c = 0$ et $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur non nul normal à $\mathcal{D}$, ie orthogonal à tout vecteur directeur de $\mathcal{D}$, ou encore orthogonal à tout vecteur de la direction de $\mathcal{D}$.

Ainsi $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est directeur de $\mathcal{D}$ (non nul !).

Exercice 6

1. Soit $\mathcal{D} : 2x - y + 1 = 0$. Donner deux points, un vecteur directeur et un vecteur normal de $\mathcal{D}$.
2. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Donner une équation, un vecteur directeur et un vecteur normal de $\mathcal{D} = (AB)$.
3. Donner une équation, un deuxième point et un vecteur normal de $\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

II.1.4 Savoir faire

Déterminer si deux droites sont sécantes, parallèles.

Exercice 7
Soit $\mathcal{D} : 3x + 7y - 2 = 0$. Déterminer la distance de $M_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ à $\mathcal{D}$.

II.1.5 Cas de $\mathbb{R}^3$

Les droites de l'espace ne possèdent PAS d'équation cartésienne. A la place, on peut les décrire comme intersection de deux plans.

Exercice 8
Décrire la projection orthogonale sur $\mathcal{D} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Il s'agit, pour $M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de calculer les coordonnées de son projeté $p(M)$.

II.2 Plan de $\mathbb{R}^3$

II.2.1 Définition

Un plan de $\mathbb{R}^3$ est un ensemble de la forme $\mathcal{P} = A + \text{Vect}(u, v)$ où A est un point et (u, v) est libre (les vecteurs ne sont pas colinéaires). Sa direction est le sous-espace vectoriel de dimension 2 $\text{Vect}(u, v)$.

Ainsi un point M est un point de $\mathcal{P}$ ssi $(\overrightarrow{AM}, u, v)$ est liée (encore une fois, on pensera au déterminant).

II.2.2 Equation

Soit $\mathcal{P}$ un plan de $\mathbb{R}^3$. Alors $\mathcal{P}$ possède une équation de la forme $\mathcal{P} : ax+by+cz+d=0$ où $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur non nul, normal à $\mathcal{P}$.

Exercice 9
Donner une équation $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ ainsi que 2 autres points de ce plan, de telle manière que la donnée des nos trois points détermine $\mathcal{P}$.

Exercice 10
Donner une base et trois points non alignés de $\mathcal{P} : x + 2y - z + 1 = 0$.

Donner ensuite l'expression de la projection orthogonale sur $\mathcal{P}$, puis celle de la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{P}$.

II.3 Cercles

II.3.1 Définition

Soit Ω un point d'un plan ($\mathbb{R}^2$ ou un plan de $\mathbb{R}^3$). Le cercle de centre Ω et de rayon $R \in]0, +\infty[$ est l'ensemble des points de ce plans à distance R de Ω.

II.3.2 Equation

Dans $\mathbb{R}^2$, tout cercle possède une équation de la forme $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$ où $\begin{pmatrix} x_\Omega \\ y_\Omega \end{pmatrix}$ est le centre et R le rayon.

II.3.3 Tangentes

La tangente en un point M_0 du cercle $\mathcal{C}$ est la droite passant par M_0 et orthogonale à $\overrightarrow{\Omega M_0}$.

Exercice 11
Pour une droite $\mathcal{D}$ donnée, décrire le lieu des centres des cercles tangents à $\mathcal{D}$ en un point $M_0 \in \mathcal{D}$ fixé.

II.3.4 Cercle et orthogonalité

Pour A, B fixés et distincts dans $\mathbb{R}^2$, l'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM}$ est le cercle de diamètre $[AB]$ (ou la sphère de diamètre $[AB]$ dans $\mathbb{R}^3$).

Exercice 12
Décrire en fonction des rayons et des centres le nombre de points d'intersection de deux cercles du plan.

Exercice 13 (Adaptation à l'espace)
Dans un repère orthonormal direct on donne les points $A : (1, 2, 3)$, $B : (2, 3, 1)$, $C : (3, 1, 2)$, $D : (1, 0, -1)$.

1. Chercher le centre et le rayon de la sphère circonscrite à $ABCD$.
2. Chercher les équations cartésiennes des plans (ABC), (ABD), (ACD), (BCD).
3. Chercher le centre et le rayon de la sphère inscrite dans le tétraèdre $ABCD$.

III Transformations

III.1 Projections et symétries orthogonales

III.1.1 Principe général

1. On projette toujours des vecteurs. Généralement, pour calculer le projeté d'un point M, on projettera en fait un vecteur $\overrightarrow{AM}$.
2. Le but est toujours d'écrire $\overrightarrow{AM}$ comme somme de deux vecteurs. Cette fois les vecteurs sont orthogonaux.

   On pourra penser à utiliser le produit scalaire pour simplifier les calculs.

Exercice 14
Calculer l'expression de la projection orthogonale sur $\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

III.1.2 Calcul de symétries

On procède comme dans un espace vectoriel. Si on note $p(M)$ le projeté orthogonal de M et $s(M)$ son symétrique orthogonal par rapport à une droite ou un plan passant par A, alors $\overrightarrow{As(M)} = \overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{p(M)M}$ (refaire un schéma).

III.2 Rotations

III.2.1 Dans le plan

La rotation vectorielle d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ est l'application $r_\theta : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\theta)x - \sin(\theta)y \\ \sin(\theta)x + \cos(\theta)x \end{pmatrix}$, ie l'application linéaire canoniquement associée à $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Exercice 15
Calculer $R_\theta R_\varphi$.

III.2.2 Bases orthonormées directes

Toute base orthonormée directe de $\mathbb{R}^2$ a une matrice de la forme R_φ.

Exercice 16
Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^2$. Donner la matrice de r_θ dans $\mathcal{B}$.

III.2.3 Rotation autour d'un point

Pour exprimer la rotation autour d'un point A, on appliquera la rotation vectorielle (de centre O) au vecteur $\overrightarrow{AM}$.

Exercice 17
Calculer les coordonnées de l'image de $M = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ par la rotation de centre $A = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$ par deux méthodes : via les matrices et en utilisant les complexes.

Exercice 18
Soit $u = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donner une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$ de la forme (u, v, w).

III.2.4 Rotation dans l'espace

On se contente ici de rotations vectorielles.

Soit $D = \mathrm{Vect}(u)$ une droite de $\mathbb{R}^3$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On **impose** $\|u\| = 1$. Alors on peut trouver v, w tels que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ soit une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$.

La rotation d'axe D et d'angle θ est l'application linéaire r_θ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r_\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

III.2.5 Interprétation

Soit P le plan (vectoriel) orthogonal à D. Alors $P = \mathrm{Vect}(v, w)$ et dans ce plan, r_θ a la matrice d'une rotation du plan d'angle θ.

Exercice 19
Donner la matrice dans la base canonique de la rotation d'axe Vect $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Astuce : si une base est orthonormée, alors l'inverse de sa matrice dans la base canonique est simplement sa transposée.