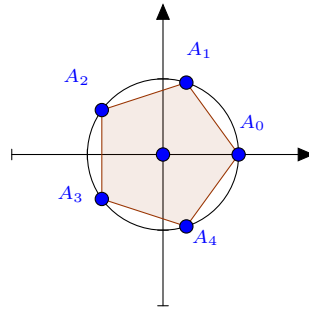


# Devoir maison 3

A rendre le 04/11/2016 au plus tard.

## Exercice 1

On souhaite tracer proprement un pentagone régulier. Comme expliqué en cours, il nous faut d'abord connaître la valeur exacte de  $\cos \frac{2\pi}{5}$ .



On pose  $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{5}\right)$ .

1. Rappeler la valeur de  $\omega^5$ .
2. Calculer  $\sum_{k=0}^4 e^{\frac{2ik\pi}{5}}$ . Traduire en fonction de  $\omega$ .
3. Posons  $\alpha = \omega + \omega^4$  et  $\beta = \omega^2 + \omega^3$ . Calculer  $\alpha + \beta$  et  $\alpha\beta$  puis en déduire une équation simple (E) dont les solutions sont  $\alpha$  et  $\beta$ .  
Indication : on connaît la somme et le produit de deux quantités...
4. Résoudre (E). il s'agit maintenant de savoir qui est  $\alpha$  parmi les 2 solutions de (E).
5. Ecrire  $\alpha$  et  $\beta$  sous forme de cosinus et conclure que  $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ .
6. Tracé! Les seuls instruments admissibles dans cette question sont : la règle NON GRADUÉE et le compas.  
Laissez les traits et cercles de construction bien visibles.
  - (a) Rappeler (éventuellement via G\*\*gle) comment tracer la médiatrice d'un segment, puis comment tracer la perpendiculaire à une droite passant par un point donné de cette droite.
  - (b) Tracer sur une feuille blanche un repère orthonormé direct ainsi que le cercle de centre O et de rayon 1. Choisissez une unité un peu grande. Placer le point  $A_0$  de coordonnées (1, 0).
  - (c) Au verso de votre feuille blanche (et en utilisant le théorème de Pythagore), tracer un segment de longueur  $\sqrt{5}$  puis sur ce segment, un segment de longueur  $\sqrt{5} - 1$  et enfin un segment de longueur  $\cos \frac{2\pi}{5}$ .
  - (d) Placer dans votre repère le point H de coordonnées  $(\cos \frac{2\pi}{5}, 0)$  puis les points  $A_1$  et  $A_4$  d'affixes respectives  $\omega$  et  $\omega^4$ .
  - (e) Finir le tracé du pentagone régulier.
7. On souhaite maintenant en savoir un peu plus sur le pentagone ainsi tracé. Calculer la longueur  $A_0A_1$  et en déduire le périmètre de notre pentagone. Exprimer les résultats en fonction de  $\sin \frac{\pi}{5}$ .
8. Calculer l'aire du triangle  $OA_0A_1$  et en déduire l'aire de notre pentagone. Exprimer les résultats en fonction de  $\sin \frac{2\pi}{5}$ .
9. Calculer  $\sin \frac{\pi}{5}$  et  $\sin \frac{2\pi}{5}$  puis exprimer le périmètre et l'aire trouvés  $\zeta$  l'aide de radicaux (racines carrées).