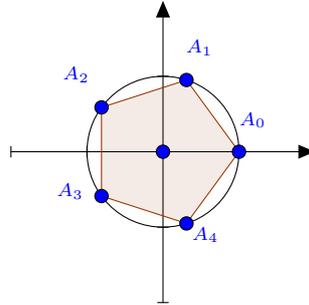


Devoir maison 3

A rendre le 04/11/2016 au plus tard.

Exercice 1

On souhaite tracer proprement un pentagone régulier. Comme expliqué en cours, il nous faut d'abord connaître la valeur exacte de $\cos \frac{2\pi}{5}$.



On pose $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{5}\right)$.

1. Rappeler la valeur de ω^5 .
2. Calculer $\sum_{k=0}^4 e^{\frac{2ik\pi}{5}}$. Traduire en fonction de ω .
3. Posons $\alpha = \omega + \omega^4$ et $\beta = \omega^2 + \omega^3$. Calculer $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$ puis en déduire une équation simple (E) dont les solutions sont α et β .
Indication : on connaît la somme et le produit de deux quantités...
4. Résoudre (E). il s'agit maintenant de savoir qui est α parmi les 2 solutions de (E).
5. Ecrire α et β sous forme de cosinus et conclure que $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.
6. Tracé! Les seuls instruments admissibles dans cette question sont : la règle NON GRADUÉE et le compas.
Laissez les traits et cercles de construction bien visibles.
 - (a) Rappeler (éventuellement via G**gle) comment tracer la médiatrice d'un segment, puis comment tracer la perpendiculaire à une droite passant par un point donné de cette droite.
 - (b) Tracer sur une feuille blanche un repère orthonormé direct ainsi que le cercle de centre O et de rayon 1. Choisissez une unité un peu grande. Placer le point A_0 de coordonnées (1, 0).
 - (c) Au verso de votre feuille blanche (et en utilisant le théorème de Pythagore), tracer un segment de longueur $\sqrt{5}$ puis sur ce segment, un segment de longueur $\sqrt{5} - 1$ et enfin un segment de longueur $\cos \frac{2\pi}{5}$.
 - (d) Placer dans votre repère le point H de coordonnées $(\cos \frac{2\pi}{5}, 0)$ puis les points A_1 et A_4 d'affixes respectives ω et ω^4 .
 - (e) Finir le tracé du pentagone régulier.
7. On souhaite maintenant en savoir un peu plus sur le pentagone ainsi tracé. Calculer la longueur A_0A_1 et en déduire le périmètre de notre pentagone. Exprimer les résultats en fonction de $\sin \frac{\pi}{5}$.
8. Calculer l'aire du triangle OA_0A_1 et en déduire l'aire de notre pentagone. Exprimer les résultats en fonction de $\sin \frac{2\pi}{5}$.
9. Calculer $\sin \frac{\pi}{5}$ et $\sin \frac{2\pi}{5}$ puis exprimer le périmètre et l'aire trouvés ζ l'aide de radicaux (racines carrées).