Devoir surveillé n°4

Durée : 4H. Calculatrices interdites. **Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction et la propreté : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.**
Lisez l'énoncé attentivement et en entier **AVANT** de commencer chaque exercice.

Exercice 1 (Question de cours)

1. Soit $\lambda > 0$. On suppose qu'une variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre λ. Donner $\mathbb{P}(X = n)$ pour des valeurs de n à préciser.
   Quelles est l'espérance de X ? Sa variance ?
2. Donner un exemple de matrice non diagonale mais diagonalisable.
3. Donner la somme et le produit des valeurs propres (comptées avec multiplicité) de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   En admettant que le coefficient de λ dans $\chi_A(\lambda)$ est nul, calculer $\chi_A(\lambda)$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$.
4. Donner un exemple de série entière de rayon de convergence 1 puis un de rayon 2.
5. Donner le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} nx^n$ puis calculer sa somme pour $x \in]-R, R[$.
   Est-ce que la série converge pour $x = R$? $x = -R$?

Exercice 2

Le but de cet exercice est de proposer une méthode effective de calcul d'une valeur approchée de π.

1. **Questions préliminaires** : aucune justification n'est attendue (mais une rédaction minimale l'est par contre : faites au moins une phrase à chaque fois).
   (a) Soient q un réel et n un entier naturel. Que vaut $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k$?
   (b) Rappeler pour quelles valeurs du réel α la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge.
   (c) Donner l'ensemble de définition, de dérivabilité, la dérivée et le tableau de variations complet (y compris les limites aux bornes) de la fonction arctan.
2. Etude de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.
   (a) La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ est elle absolument convergente ?
   (b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Calculer $I_k = \int\limits_0^1 t^{2k}\mathrm{d}t$ ainsi que l'intégrale $\int\limits_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$. Montrer que $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k I_k$ puis
   $$S_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t$$
   (d) Démontrer que pour tout entier naturel n,
   $$0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2n+3}$$
   (e) Conclure quand à la convergence et la somme de $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$
3. Calcul effectif.
   (a) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $|4S_n - \pi| \leqslant \frac{1}{2n+1}$.
   (b) Expliquer comment obtenir une valeur approchée de π à 10^{-6} près. Donner ensuite un code python permettant de calculer cette valeur approchée.
4. Une deuxième méthode.

(a) Déterminer le développement en série entière de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ (en précisant le rayon de convergence) et en déduire celui de la fonction arctan.

(b) Que vaut $\arctan(\frac{\sqrt{3}}{3})$? Exprimer alors π comme somme d'une série convergente. Simplifier l'expression pour ne pas avoir de racine carrée **dans** la somme.

(c) Cette fois la qualité de l'approximation est plus délicate à obtenir. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels qui est décroissante et qui tend vers 0. On pose $\forall n \in \mathbb{N}\ v_n = (-1)^n u_n$.

i. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \geqslant 0$. Est-ce que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge ?

ii. On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} v_n$. Montrer que les suites $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

iii. En déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ converge vers un réel s qui vérifie $\forall n \in \mathbb{N}\ s_{2n+1} \leqslant s \leqslant s_{2n}$.

iv. On note $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} v_k = s - s_n$. Montrer que

— r_n est du signe de v_{n+1}.

— $|r_n| \leqslant |v_{n+1}|$.

(d) On note $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la question 4b. Donner un majorant de $|\pi - s_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(e) Montrer que $|\pi - s_n| \leqslant \frac{2\sqrt{3}}{3^{n+2}}$. Donner ensuite un majorant du nombre de termes dans la somme s_n pour que s_n soit une approximation de π à 10^{-6} près. Comparer à la méthode précédente.

Il y a cependant un problème à régler : pour obtenir une valeur approchée de π, il nous faut une bonne valeur approchée de $\sqrt{3}$...

(f) Ecrire une fonction python **pi(e)** qui prend un argument e et retourne une valeur approchée v de π telle que $|\pi - v| \leqslant e$. On utilisera la série convergente de cette question, et on calculera le moins de terme possible. Pour le calcul de $\sqrt{3}$, on utilisera la fonction **math.sqrt**.

Remarque : pour obtenir une bonne valeur approchée de $\sqrt{3}$ sous forme de fraction, on peut utiliser la suite classique $u_0 = 1, \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{3}{2u_n}$.

Exercice 3

1. On considère la fonction f définie sur $]-1,1[$ par : $\forall x \in]-1,1[\ f(x) = \frac{1}{1-x}$.

   (a) Donner l'expression de la dérivée $k$ième de f pour tout $k \geqslant 0$.

   (b) En déduire le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$ pour k entier positif.

2. Nous allons retrouver ce résultat. Soit $k \in \mathbb{N}$. On définit $g : x \mapsto \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$ pour $k \in \mathbb{N}$ fixé.

   (a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Rappeler sans justification le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$ en précisant le rayon de convergence.

   (b) Montrer que $\forall x \in]-R,R[\ g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \binom{k+n}{n} x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \binom{k+n}{k} x^n$ pour un $R \in]0,+\infty[$ à préciser.

3. Passons aux choses sérieuses. Soit $p \in]0,1[$. On considère deux variables aléatoires X, Y telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\ \mathbb{P}(X = n) = p(1-p)^{n-1}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\} \forall k \in [\![0,n]\!]\ \mathbb{P}(Y = k | X = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

   (a) Reconnaître ces deux lois et donner une interprétation (ou un exemple de variable qui suit cette loi) pour chacune.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $k \in \mathbb{N}$. On suppose $k > n$. Que vaut $\mathbb{P}(Y = k|X = n)$? Justifier.

   (c) Déterminer la loi du couple (X, Y), c'est à dire les probabilités $(X = n, Y = k)$ pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}\backslash\{0\} \times \mathbb{N}$.

   (d) Montrer que la loi de X est donnée par

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1-p}{2-p} \text{ et } \forall k \geqslant 1\ \mathbb{P}(X = k) = \frac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}}$$

   (e) On considère deux variables aléatoire U, V indépendantes et $\lambda \in]0,1[$. On suppose que U suit une loi de Bernoulli de paramètre λ et V suit une loi géométrique de paramètre λ.

   On pose $Z = UV$. Calculer $\mathbb{P}(Z = 0)$ et pour $k \geqslant 1$, $\mathbb{P}(Z = k)$.

(f) Trouver λ pour que Z ait la même loi que X.

Exercice 4

n désigne un entier naturel non nul.

Pour $x_1, \dots, x_n$ des réels, on note $\text{diag}(x_1, \dots, x_n)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont $x_1, \dots, x_n$ dans cet ordre. Par exemple $I_3 = \text{diag}(1, 1, 1)$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une racine carrée de A ssi $R^2 = A$. On note

$$\text{Rac}(A) = \{R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) |\ R^2 = A\}$$

l'ensemble des racines carrées de A.

I Premiers exemples

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que la matrice $M_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$ est une racine carrée de I_2.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et R une racine carrée de A. Montrer que si A est inversible ssi R est inversible.
3. Traduire la question précédente en termes de valeur propre.
4. On pose $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$
   (a) Montrer que 0 est valeur propre de A et donner la dimension de l'espace propre associé.
   (b) Montrer que A est diagonalisable et donner une matrice D diagonale semblable à A. Le calcul de χ_A est facultatif.
   On note P la matrice de passage utilisée. On ne demande pas le calcul explicite de P ni de P^{-1}
   (c) Donner deux matrices M telle que $(PMP^{-1})^2 = A$.

II Cas $A = I_n$

Dans cette partie seulement, on pose $A = I_n$ et on cherche à déterminer $\text{Rac}(A) = \text{Rac}(I_n)$.

1. Soit $R \in \text{Rac}(A)$. Montrer que R est inversible et exprimer son inverse.
2. Montrer que la matrice R de la question précédente est diagonalisable et décrire une matrice diagonale correspondante.
3. Pour $i \in [\![1, n]\!]$ on pose $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$. Déterminer les éléments de $\text{Rac}(A)$.

III n valeurs propres distinctes

On suppose que la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet n valeurs propres réelles $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$.

1. Justifier l'existence d'une matrice $P \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que
$$A = PDP^{-1} \text{ où } D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n),$$
   puis montrer que R est une racine carrée de A, si et seulement si la matrice $S = P^{-1}RP$ est une racine carrée de D.
2. **Racines carrées de D**
   (a) Montrer que $DS = SD$.
   (b) En déduire que la matrice S est diagonale.
   (c) On note alors $S = \text{diag}(s_1, \dots, s_n)$. Que vaut s_i^2 lorsque $i \in \{1, \dots, n\}$?
   (d) Que peut-on dire de $\text{Rac}(A)$ si A admet une valeur propre strictement négative ?
   (e) Si on suppose toutes les valeurs propres de A positives ou nulles, déterminer les racines carrées de la matrice D.
3. Écrire toutes les racines carrées de A à l'aide de la matrice P. Combien de racines carrées A admet-elle ? (On discutera selon le signe des valeurs propres de A).