Table des matières

I Intégrales dépendant d'un paramètre

I.1 Cadre d'étude

I.1.1 Transformée de Laplace

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ au moins et continue.

La transformée de Laplace de f est la fonction $F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t$ quand cette fonction F est bien définie. En particulier, si f est un $O_{+\infty}(t^k)$ pour un $k \in \mathbb{N}$ alors F est bien définie sur $]0, +\infty[$.

Si f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ alors F est définie sur $[0, +\infty[$.

I.1.2 La fonction Gamma

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. A quelle condition sur α l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^t\mathrm{d}t$ est-elle convergente ?

Remarquons que $f : t :\mapsto t^{\alpha-1}e^{-t}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$ et même continue en 0 (par prolongement) si $\alpha \geqslant 1$.

— Etude en 0. On a $f(t) \underset{0}{\sim} t^{\alpha-1}$ qui est intégrable au voisinage de 0 ssi $-(\alpha-1) < 1$ ie $\alpha > 0$. Par comparaison de fonctions positives, f est intégrable sur $]0, 1]$ ssi $\alpha > 0$.

— Etude en $+\infty$. On a $t^2 f(t) = t^{\alpha+1}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ par croissances comparées et donc $f(t) = o_{+\infty}(\frac{1}{t^2})$. Par comparaison de fonctions positives, f est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Conclusion : f est intégrable sur $]0, +\infty[$ ssi $\alpha > 0$.

On pose maintenant $\Gamma : \left\{ \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t \end{array} \right.$. Cette fonction est bien définie.

I.1.3 Exemple

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2+x}\mathrm{d}t$ est bien définie sur $]0, +\infty[$.

I.1.4 Exemple

Donner l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \int_0^{\pi} \cos(x\sin(t))\mathrm{d}t$.

I.2 Continuité

I.2.1 Théorème

Soit I, J deux intervalles non triviaux de $\mathbb{R}$, $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} I \times J & \to & \mathbb{K} \\ (x,t) & \mapsto & \varphi(x,t) \end{array} \right.$ une fonction.

Supposons que :

1. Pour $x \in I$ fixé, $f_x : t \mapsto f(x,t)$ est continue sur J.
2. Pour $t \in I$ fixé, $f_t : x \mapsto f(x,t)$ est continue sur I.
3. (hypothèse de domination) Il existe $g : J \to \mathbb{R}$ une fonction positive, continue et intégrable sur J telle que

$$\forall (x,t) \in I \times J \; |f(x,t)| \leqslant g(t)$$

Alors la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \int_J \varphi(x,t)\mathrm{d}t \end{array} \right.$ est définie et continue sur l'intervalle I.

Preuve.

On montre juste que f est bien définie, ie que pour $x \in I$ fixé, $\int_J \varphi(x,t)\mathrm{d}t$ converge.

Or pour x fixé, on a $\forall t \in J \; |\varphi(x,t)| \leqslant g(t)$ avec g intégrable sur J. Par comparaison de fonctions positives, $t \mapsto \varphi(x,t)$ est intégrable sur J donc son intégrale converge. Ainsi $f(x)$ existe bien. ∎

I.2.2 Remarque

1. La première hypothèse assure que la convergence de l'intégrale $\int_J \varphi(x,t)\mathrm{d}t$ peut avoir du sens.
2. La deuxième hypothèse est "naturelle". On peut que la fonction f qui dépend de x soit continue. Il faut donc partir de fonctions de x qui soient continue.
3. La troisième hypothèse est la plus importante et la plus délicate en pratique. Il faut trouver un majorant de $|\varphi(x,t)|$ qui **ne dépend pas** de la valeur de x mais peut éventuellement dépendre de celle de t.

I.2.3 Exemple

Montrer que $f : x \mapsto \int_0^{\pi} \cos(x\sin(t))\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}$. On pose $\varphi : (x,t) \mapsto \cos(x\sin(t))$ définie sur $\mathbb{R} \times [0, \pi]$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On a déjà vu que $t \mapsto \varphi(x,t)$ est continue sur $[0, \pi]$.
2. Soit $t \in [0, \pi] fix$. Alors $x \mapsto \cos(x\sin(t))$ est continue sur $\mathbb{R}$ (de la forme $x \mapsto \cos(\alpha x)$ pour un $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé).

3. Dominons ! Soit $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\pi]$. Alors $|\cos(x\sin(t))| \leqslant 1$. Comme la fonction constante 1 est intégrable sur $[0,\pi]$ on peut appliquer le théorème précédent.

f est continue sur $\mathbb{R}$.

I.2.4 Domination locale

$\Gamma : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t \end{array} \right.$.

Soit $a,b > 0$ avec $a < b$. Montrer que Γ est continue sur $[a,b]$. On pose $\varphi : (x,t) \mapsto t^{x-1}e^{-t} = e^{(x-1)\ln(t)}e^{-t}$.

1. Pour $x \in [a,b]$ fixé, $t \mapsto \varphi(x,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$.
2. Pour $t > 0$ fixé, $x \mapsto \varphi(x,t)$ est continue sur $[a,b]$.
3. Soit $x \in [a,b]$ et $t > 0$. $t^{x-1}e^{-t} \leqslant \begin{cases} t^{a-1}e^{-t} & \text{si } t \in]0,1] \\ t^{b-1}e^{-t} & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases}$.

   Dans tous les cas $|t^{x-1}e^{-t}| \leqslant (t^{a-1} + t^{b-1})e^{-t}$ qui est intégrable sur $]0,+\infty[$ par somme et d'après l'étude du début de chapitre.

Finalement Γ est continue sur $[a,b]$.

Montrons maintenant que Γ est continue sur $]0,+\infty[$. Soit $x > 0$. Alors Γ est continue sur $[x/2, x+1]$ et donc continue en x. Ainsi Γ est continue sur $]0,+\infty[$.

I.2.5 Exemple

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{t+x}\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $]0,+\infty[$. On pourra montrer la continuité sur $[a,+\infty[$ pour tout $a > 0$.

Remarque : on peut cette fois majorer par une constante, car on intègre sur un segment et il n'y a pas de problème de convergence d'intégrale, seulement celui de trouver un majorant indépendant de x.

II Dérivabilité

II.1 Approche intuitive

On reprend le cadre précédent et on se demande si la fonction $f : x \mapsto \int_J \varphi(x,t)\mathrm{d}t$ est dérivable. Il s'agit d'une fonction de la variable x, si tout se passait pour le mieux on pourrait dériver par rapport à x comme des brutes :

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_J \varphi(x,t)\mathrm{d}t = \int_J \frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}\mathrm{d}t$$

II.2 Le théorème

II.2.1 Théorème

Soit I, J deux intervalles non triviaux de $\mathbb{R}$, $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} I \times J & \to & \mathbb{K} \\ (x,t) & \mapsto & \varphi(x,t) \end{array} \right.$ une fonction.

Supposons que :

1. Pour $x \in I$ fixé, $f_x : t \mapsto f(x,t)$ est continue sur J et intégrable sur J.
2. Pour $t \in I$ fixé, $f_t : x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
3. Pour $x \in I$ fixé, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur J
4. (hypothèse de domination) Il existe $g : J \to \mathbb{R}$ une fonction positive, continue et intégrable sur J telle que

$$\forall (x,t) \in I \times J \ |\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)| \leqslant g(t)$$

Alors la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \int_J \varphi(x,t)\mathrm{d}t \end{array} \right.$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I. De plus, pour $x \in I$

$$f'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$$

II.2.2 Remarque sur les hypothèses

1. L'intégrabilité de la fonction de t a normalement déjà été étudiée pour déterminer le domaine de définition de f.
2. On veut dériver par rapport à x, comme d'habitude, on s'assure que cette opération est licite.
3. Nous n'intégrons que des fonctions continues. Vu la conclusion (désirée, voir le point précédent), cette vérification est naturelle.
4. Cette fois, c'est la dérivée partielle par rapport à x qu'il faut dominer. Les mêmes remarques et techniques s'appliquent. En particulier, le but est d'obtenir un majorant **qui ne dépend pas de** x.

II.2.3 Exemple

Montrer que $f : x \mapsto \int_0^{\pi} \cos(x\sin(t))\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

La fonction $\varphi : (x,t) :\mapsto \cos(x\sin(t))$ est dérivable par rapport à x par composition et $\frac{\partial\varphi}{\partial x} : (x,t) \mapsto \sin(t)\cos(x\sin(t))$ est continue sur $\mathbb{R} \times [0,\pi]$. Ceci prouve les 3 premières hypothèses.

Pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\pi]$, $|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)| \leqslant 1$ et 1 est intégrable sur le segment $[0,\pi]$. D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $f' : x \mapsto \int_0^\pi \sin(t)\cos(x\sin(t))\mathrm{d}t$.

II.2.4 Fonction Γ

Montrer que la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur tout $[a,b]$ segment non trivial de $]0,+\infty[$. On en déduit que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.

II.2.5 Exemple

Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$. Donner le domaine de définition de f, prouver que f est $\mathcal{C}^1$ et calculer f'.

La fonction φ est $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & e^{-xt}\frac{\sin(t)}{t} \end{array}\right.$.

Pour $x = 0$, l'intégrale $f(0)$ converge d'après le cours sur les intégrales. Pour $x > 0$, $|e^{-xt}\frac{\sin(t)}{t}| = o_{+\infty}(\frac{1}{t^2})$ donc $f(x)$ existe bien.

Soient $a > 0$. On va montrer la classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$.

1. Soit $x \geqslant a$ fixé. $t \mapsto \varphi(x,t)$ est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$ d'après l'étude précédente.
2. Soit $t > 0$ fixé. $t \mapsto \varphi(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t) = e^{-xt}\sin(t)$.
3. Soit $x \in [a,+\infty[$ fixé. $t \mapsto e^{-xt}\sin(t)$ est continue sur $]0,+\infty[$.
   Remarque : on peut remplacer ces deux dernières vérifications par : $\varphi \in \mathcal{C}^1([a,+\infty[\times]0,+\infty[,\mathbb{R})$ par composition, produit et quotient dont le dénominateur ne s'annule pas.
4. Soit $x \geqslant a$ et $t > 0$. $|e^{-xt}\sin(t)| \leqslant e^{-at}$ qui est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Finalement, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ et donc (le raisonnement étant valable pour tout $a > 0$) sur $]0,+\infty[$.

De plus, pour $x > 0$, $f'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin(t)\mathrm{d}t = \mathrm{Im}(\int_0^{+\infty} e^{-xt+it}\mathrm{d}t) = \mathrm{Im}(\frac{1}{-x+i}) = -\frac{1}{1+x^2}$.

Ainsi $f(x) = K - \arctan(x)$. De plus, pour tout $t > 0$, $|\frac{\sin(t)}{t}| \leqslant 1$ (IAF par exemple), donc $|f(x)| \leqslant \int_0^{-\infty} e^{-xt}\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$.

Ainsi $f(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$ et finalement $f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$ pour tout $x > 0$.

II.2.6 Complément

Notre théorème ne nous permet pas de conclure quand à la valeur de $f(0)$ car nous n'avons pas la continuité de f en 0. D'après un de nos DM, on a bien $f(0) = \frac{\pi}{2}$, mais la preuve est délicate.