Entrainement

Exercice 1
Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes, en précisant s'il s'agit d'un ouvert, d'un fermé, d'une partie bornée (ou rien de tout ça !)

$f_1 : (x,y) \mapsto \ln(xy)$ $\qquad f_2 : (x,y) \mapsto \ln(x) + \sqrt{y}$ $\qquad f_3 : (x,y) \mapsto \arcsin(|x+y|)$

Exercice 2
On considère la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \cos(x-y) \end{array} \right.$. Donner une équation du plan tangente à la surface représentative de f au point de coordonnées $(\frac{\pi}{2}, 0, f(\frac{\pi}{2}, 0))$.

Exercice 3
Soit $f : (x,y,z) \mapsto \sin^2(x) + \cos^2(y) + z^2$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ et calculer son développement limité à l'ordre 1 au voisinage de $a = (x_0, y_0, z_0)$ fixé.

Exercice 4
Justifier que $f : (x,y) \mapsto \arctan(\frac{y}{x})$ est $\mathcal{C}^1$ sur un domaine à préciser et calculer son gradient. Interpréter géométriquement sa direction et sa norme par rapport au vecteur de coordonnées (x,y).

Exercice 5
Soit $f, \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$. On pose $F : (x,y) \mapsto f(x + \varphi(y))$. Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert à déterminer et établir l'égalité

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

EDP

Exercice 6
Trouver toutes les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ qui vérifient $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y \end{array} \right.$

Exercice 7
A l'aide d'un changement de variable linéaire, résoudre l'équation $2\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ d'inconnue f, une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

On exprimera f en fonction des variables x et y.

Exercice 8
Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^3$.

On dit que f est harmonique ssi $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. (son laplacien est nul).

1. Montrer que si f est harmonique alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ et $(x,y) \mapsto x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont harmoniques.
2. Dans cette question, $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
   On suppose que f peut s'écrire sous la forme
   $$f(x,y) = \varphi(x^2 + y^2)$$
   avec $\varphi : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.
   Montrer que la fonction f est harmonique ssi φ vérifie une équation différentielle sur $\mathbb{R}^{+*}$ puis résoudre cette équation différentielle.

Exercice 9
Le but de cet exercice est de déterminer toutes les fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ invariante par translation, c'est à dire qui vérifient

$$\forall (x,y,t) \in \mathbb{R}^3 \; f(x+t, y+t) = f(x,y)$$

1. On suppose dans cette question que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ qui vérifie l'hypothèse précédente.
   (a) Montrer que f vérifie l'équation $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Indication : on pourra fixer $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
   (b) On effectue le changement de variable $f(x,y) = g(u,v)$ où $u = x+y$ et $v = x-y$. Trouver une équation aux dérivées partielles simple vérifiée par g, puis déterminer g et enfin f.
2. Conclure.

Extrema

Exercice 10
Soit $f : (x,y) \mapsto y^2 - x^2 y + x^2$ définie sur $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 - 1 \leqslant y \leqslant 1 - x^2\}$.

1. On note Γ la frontière de D. Représenter D et Γ graphiquement.
2. Déterminer les points critiques de f.
3. Trouver le maximum et le minimum de f. Pour étudier f sur Γ, on introduira deux fonctions d'une variable.

Exercice 11
On pose $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x \geqslant 0 \text{ et } y \geqslant 0 \text{ et } z \geqslant 0 \text{ et } x+y+z = 1\}$.

1. On souhaite calculer $\max\limits_{(x,y,z) \in K} (xyz)$. Transformer l'égalité et la condition sur z dans la définition de K pour introduire un sous-ensemble Δ et une fonction de deux variables à étudier pour répondre à la question.

2. Calculer le maximum demandé.
3. Soient x, y, z des réels positifs tels que $x+y+z \neq 0$. Montrer que $(xyz)^{\frac{1}{3}} \leqslant \frac{x+y+z}{3}$.
   On pourra introduire, entre autre $X = \frac{x}{x+y+z}$.

Question bonus : citer l'inégalité classique qui correspond dans le cas de 2 réels positifs.

Exercice 12 (Bonus)
Une deuxième méthode pour traiter l'exercice précédent.

1. Soit $\lambda \in [0,1]$ et $x, y > 0$. Montrer que $\ln(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant \lambda \ln(x) + (1-\lambda)\ln(y)$.
   L'interprétation géométrique est simple : Le segment reliant $\begin{pmatrix} x \\ \ln(x) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} y \\ \ln(y) \end{pmatrix}$ est en dessous de la courbe représentative de ln.
2. Soit $(\lambda_i)_{i \in [\![1,n]\!]} \in \mathbb{R}^n$ pour un $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ telle que $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Soit également $x_1, \ldots, x_n > 0$ Montrer que
   $$\ln\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ln(x_i)$$
3. Avec les notations précédentes, montrer que $\prod\limits_{i=1}^{n} x_i^{\lambda_i} \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$
4. Retrouver le résultat de l'exercice précédent, et le généraliser.

Exercice 13
On se place dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ muni du repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Soient A le point de coordonnées $(a, 0)$ et B le point de coordonnées $(0, b)$.

On désigne par $f(x, y)$ le carré du produit des distances du point M de coordonnées (x, y) à chaque côté du triangle ABO.

Déterminer le maximum de f à l'intérieur du triangle ABO, côtés exclus.